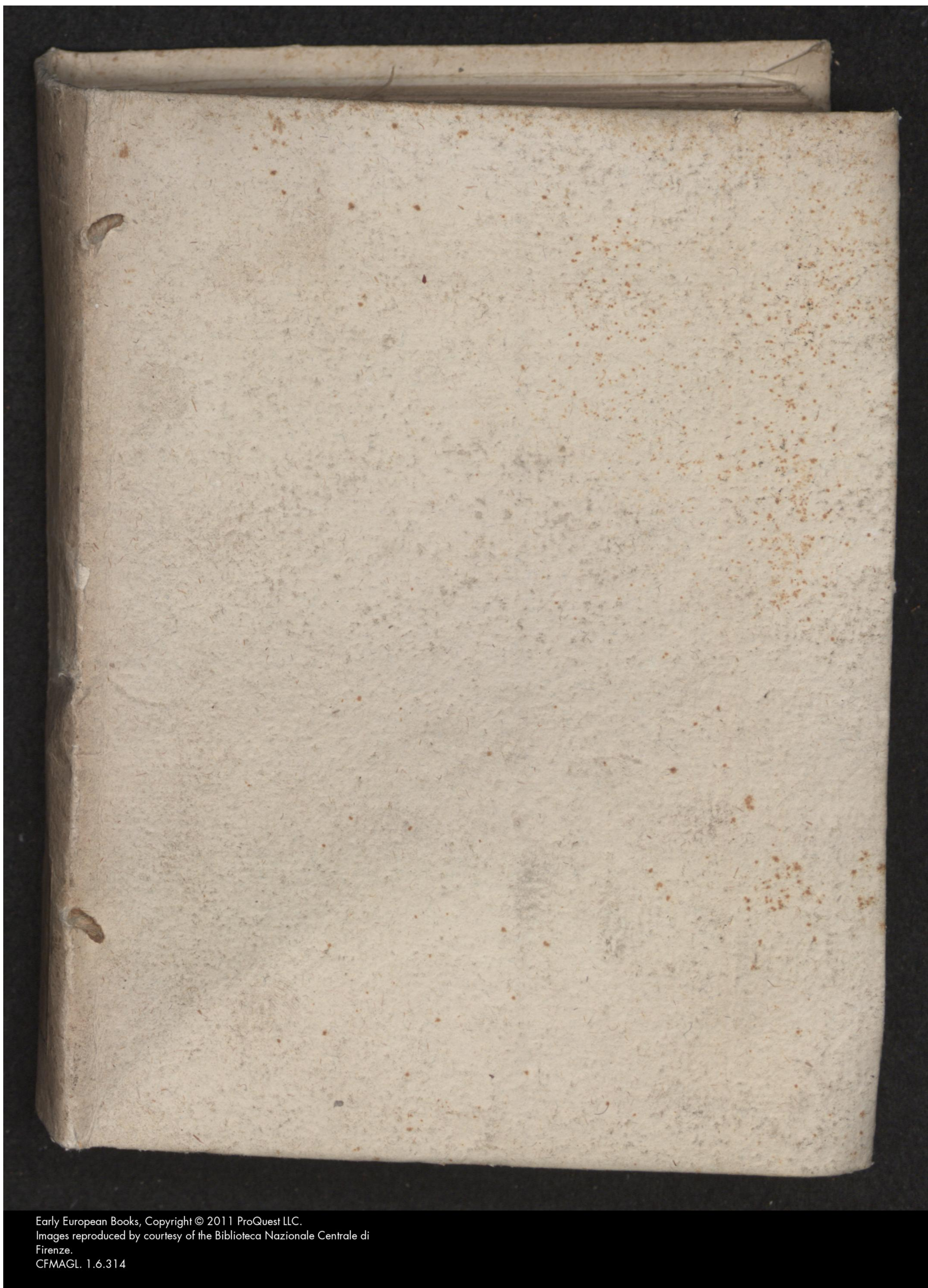
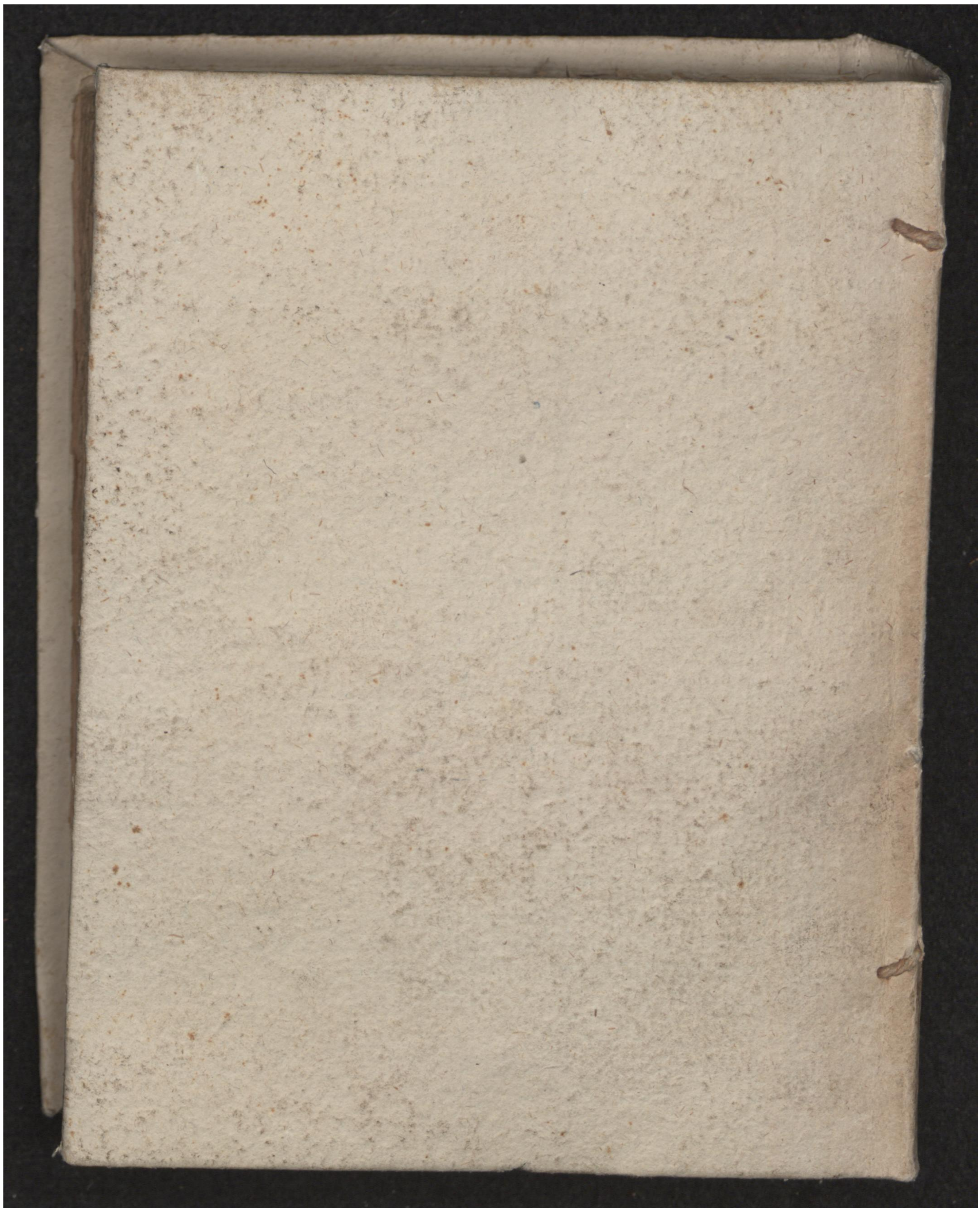


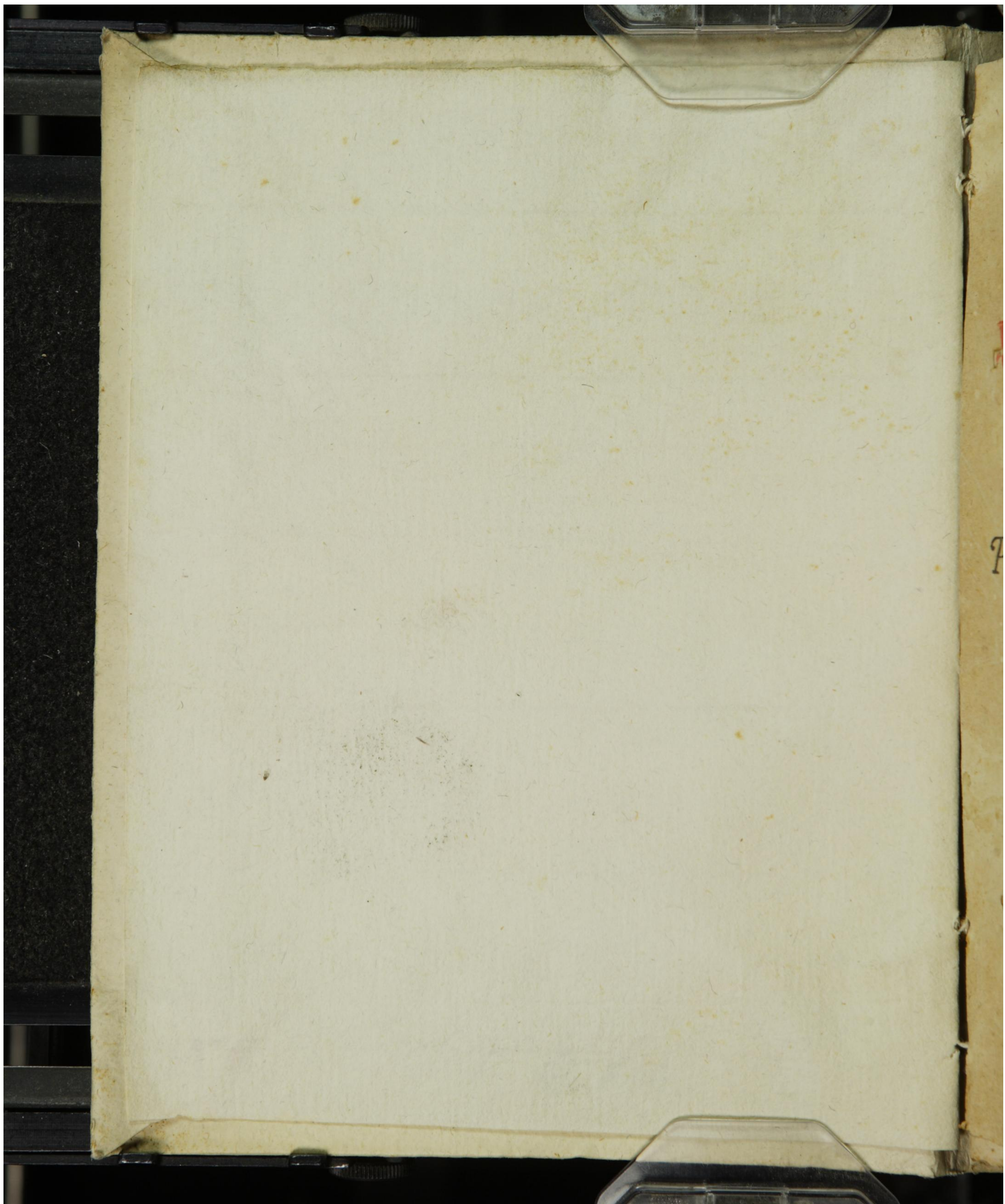

XI
LANG
1638
7
1
6
314











WILHELMI. LANGI

DE

VERITATIBUS GEOMETRICIS

LIBRI. II.

Prior, contra Scepticos & Sextum Empiricum &c. Posterior, contra Marcum Meibomium.

XI





HAFNIÆ,

Literis PETRI MORSINGI, Reg. & Acad. Typogr.

ANNO 1656.

OPTIMO ATQ; AUGUSTISSIMO
PRINCIPI

FREDERICO III.

DANIÆ. NORVEGIÆ. VANDALORUM. GOTHORUMQ;

REGI

DUCI

SLESVICI. HOLSATIÆ. STORMARIÆ. DITHMARSIÆ

COMITI
IN
OLDENBURG. ET. DELMENHORST

REGI. ET. DOMINO. MEO.
CLEMENTISSIMO

HOS

HOS

DE

VERITATIBUS. GEOMETRICIS

LIBROS

AUGUSTISSIMO. NOMINI. IPSIUS.
DEBITO. CULTU.
INSCRIPTOS. DICATOSQVE.

HUMILLIME. OFFERT.

REGIÆ. IPSIUS. MAIESTATIS.

FIDELIS. SUBDITUS. ET. SERVUS.

WILHELMUS LANGIUS.

IN NOMINE JESU CHRISTI AMEN.

WILHELMI LANGI DE VERITATIBUS GEOMETRICIS.

LIBER I.

CAPUT I.

QVamqvam omnis humana ſapientia peranguſtis limitibus circumſcribatur; ut vix ullus ſit mortalium qvi non in aliqvo labatur, qvamcunq; is demum Philoſophiæ partem attigerit: fatendum tamen eſt, inter omnes humanas diſciplinas & ſcientias nullam eſſe qvæ firmioribus nitatur fundamentis, qvam Matheſis; nullam, qvæ certiora principia magisq; perſpicuas demonſtrariones habeat. Nam cum reliqvæ ómnes circa eas verſentur res, qvæ partim propter maximam ſubtilitatem atq; obſcuritatem cognoſci neqveunt; partim ob perpetuam mutabilitatem certis ſcientiæ legibus non tam facile adſtringuntur: Matheſis medium qvaſi ſortita locum, ea conſiderat, qvæ ab ſenſi-

bus atq; intellectu haud difficulter percipiuntur; mutationibus tamen ita carent, ut scientiæ legibus facilè obtemperent. Quod qvamvis in aliis Matheseos partibus non tam clare demonstretur: tamen in Arithmeticis ac Geometricis idipsum adeò manifestè deprehenditur; ut nemo qvi veritatem amat istarum rerum certitudinem non optime perspiciat.

In hisce enim scientiis nihil supponitur aut pro vero admittitur, nisi qvod communis omnium hominum ratio, & ipsum illud veritatis lumen ac divinæ auræ particula omnibus innata hominibus, pro vero agnoscit ac recipit. Unde mirandum qvàm maximè est, dari aliqvos, qui hæc tam certa omnibusq; cognita impugnatum eant, certissimasq; veritates communi hominum intellectu comprobatas labefactare, & si non falsi arguere, saltem in dubium vocare conentur. Eqvidem non me fugit etiam Mathematicos in suis aliqvando demonstrationibus labi atq; errorem committere, (qvod tamen non ipsi scientiæ, sed obnoxio erroribus homini vitio verti debet) qvem tamen vel ipsemet vel alius qvicunque, mòdo omnia accuratè examinaverit, facile detegit. Qvid, qvod plerumq; error vel in verbis omissis maléve intellectis, vel in prava demonstrandi methodo consistat, resq; ipsa sit verissima: ideoq; facile ab aliis demonstretur. Et hoc quidem modo multi in ipso Euclide, qvẽ Geometrarum principem jure qvis appellaverit, varia emendarunt, partim verbis omissa aut deprava-

ta,

ta, partim etiam male demonſtrata. Qvibus ſane non ipſe tantum Euclides, ſed & tota poſteritas plurimum debet. Sic Ptolomæus XXIX. propoſitionem Primi. Element. non ſatis accurate ab Euclide demonſtratam, certiori via demonſtrare aggreſſus eſt; qvod alii & ante & poſt ipſum Mathematici etiam attigerunt. In propoſitione vero XVI. libri primi, omiſſa à malis librariis verba μιᾶς τῶν πλευρῶν ἐκβληθείσης vel ut Proclus legit μιᾶς πλευρᾶς προσεκβληθείσης recte cæteri Geometræ repoſuerunt; ne idem aliis eveniret qvod Philippo Mathematico, qvi referente Herone Mechanico hinc anſam traducendi Euclidem arripuit, ut eſt apud Proclum Lib. III. in I. Elem. Euclidis. Horum igitur labores laudem & gloriam merentur; cæterorum vero ſtudia vituperio potius digna: qvi ſincerum vas incruſtare cupientes, optimas ac certiſſimas demonſtrationes partim falſitatis accuſant, partim ut nimis accuratè demonſtratas irrident: qvod ſuperioribus ſeculis àb Epicureis & Scepticis factum fuiſſe legimus; qvorum tamen majorne harum rerum ignorantia an ambitio fuerit vix qvisqvam dixerit. Cum multis qvidem hominibus ita comparatum eſt, ut plus aliis ſapere videri velint: cumq; ſciant, magnam iis gratiam laudemq; ab omnibus deberi, qvi ignotas veritates in lucem protulerint, boniq; aliqvod homines docuerint, qvod antea ignorarunt: hi qvandoqvidem abſtruſas invenire neqveunt, cognitas veritates everſum eunt; & qvamvis claras ac perſpicuas

variis tamen ſophismatibus obſcurare conantur; perverſa via gloriam ſectantes. Fateor qvidem hos ipſos verbis veritatẽ crepare, magnaq; voce profiteri ſe nihil præter veritatem qværere: cum tamen re & opere monſtrent ſe eandem odio proſeqvi & diligenter fugere. Qvi ſi ignorantia peccarent; commiſeratione qvidem digni forent: eo tamen culpandi, qvod earum ſibi rerũ ſcientiam arrogent, qvam non habent. Nunc vero, cũ in rebus manifeſtis labantur; atq; obfirmato animo veritatem deſpiciant; eoſq; convitiis proſcindant, qvi rectiora tradunt: minimè ſunt ferendi.

Atq; horum ego in numero Marcum Meibomium ponere nollẽ, Virum cætera doctiſſimum & in utraq; literatura tam Græca qvam Latina probè verſatum, mihiq; amicum; niſi ipſemet vel inter primos locari voluiſſet, editoq; heic publice ſcripto, omnibus Geometris novis veteribuſq; errorem atq; ignorantiam objeciſſet. Libro enim de proportionibus pagina 9. totius ſcripti ſui rationem verbis ſane magnificis ſed vana qvadam jactantia plenis exponit. *Itaq; ait & recentiores omnes reprehendam, qui antiquos non intellexerunt; Et antiquos corrigam, qui malè quædam prodiderunt; Utroſq; inſuper nova docturus.* Ubi vero ad probationes & rem ipſam ventum eſt: tum vero declarat vel ſe nihil in his diſciplinis perſpicere; vel aliis ſplendide imponere velle. Qvæ enim proponit vera & ſana, ea omnibus Geometris non

non tantum cognita ſunt, ſed & longe meliori me-do antea à multis tradita. Cætera vero qvæ attingit, perabſurdis plane principiis, & qvæ vix ipſe Meibo-mius, apud peritos homines pro ſuis agnoſcet, nitun-tur. Et qvod peſſimum eſt, ignorantiam earum re-rum novis antiqviſque Mathematicis objicit, qvæ ipſis erant notiſſimæ. Nam & compoſitionem ratio-num in lineis tam ineffabilibus qvam effabilibus a-deo clare & perſpicue tradiderunt; ut Meibomii Me-thodus multo ſit intricatior. Jd qvoq; qvod Theoni aliisq; Mathematicis exprobrat, eos non intellexiſſe qvid veteres per duplam, triplam, qvadruplàmve rationem rationis intelligerent, qvidve voces ποσότης & πηλικότης propriè ſignificarent; plane falſū eſt: ut propterea tantam hominis audaciam mirari ſatis neqveam; qvi, ut alios accuſet, propriam exiſti-mationem in diſcrimen adducere non veretur. Nempe memoria fortè tenebat illud Juvenalis Sa-tira. XIII.

Nam cum magna malæ ſupereſt audacia cauſæ:
Creditur à multis fiducia.

Sed neq; novi qvicqvam invenit Meibomius, de qvo, in Geometria gloriari poſſit: niſi id forte do-gma tale cenſendum eſt, qvod contra Euclidem om-nesq; Geometras proponit, *duplam nempe rationem dimidiæ rationi eſſe æqualem; Et triplam, ſubtriplæ.* Qvod qvidem, alio axiomate non minus falſo confir-

mat, *si duarum rationum termini æqualem habuerint distantiam* ab æqvalitate *tum ipsas rationes esse æquales*. Qvæ omnia falsa sunt ac frivola. Qvoniam vero hæc paulo accuratius examinare animus mihi est; arbitrabar rectè me facturum, si etiam ea breviter pro ratione scripti hujus attingerem, qvæ alicujus momenti contra veritates Geometricas, ac sigillatim contra Euclidem ab aliis sunt prolata. Et cum Sceptici atqve inter hos Sextus Empiricus ipsa fundamenta Geometriæ evertere conatus sit; pauca primum de ipsius sententia dicemus: inde Epicureorum objectiones expendemus: ac tum Marci Meibomii argumenta examinabimus. Ne vero tantum Euclidi favisse videamur ut veritati ea propter qvicqvam detractum vellemus: qvædã etiam eorum, qvæ male ab Euclide sunt demonstrata, aut perperam definita, in medium adducemus: & qvomodo rectius demonstrentur explicabimus. Faveat æterna veritas, nobisqve omnibus veritatis amorem inspiret.

CAP. II.

Inter varias Philosophorum sectas, mirabilis qvædam erat Scepticorum seu Pyrrhoniorũ, qvi de omnibus rebus dubitabant; neqve sensui; neqve intellectui ullam fidem habebant; eo qvod aliqvando falli utrosqve viderent. Auctor hujus Pyrrho Eliensis, de qvo hæc tradit Diogenes Laertius ex Ascanio Abderita & aliis; qvod nihil turpe aut honestum esse arbitraretur, nihilq; justum aut injustum; sed tantum ex hominum

nũ constitutione qvædam talia censeri. Verba Diogenis Laertii in vita Pyrrhonis adscribã. οὐδὲν γὰρ ἔφασκεν οὔτε καλὸν οὔτε αἰσχρὸν· οὔτε δίκαιον, οὔτε ἄδικον· καὶ ὁμοίως ἐπὶ πάντων, μηδὲν εἶναι τῇ ἀληθείᾳ, νόμῳ δὲ καὶ ἔθει πάντα τοὺς ἀνθρώπους πράττειν· οὐ γὰρ μᾶλλον τόδε ἢ τόδε εἶναι ἕκαστον. ἀκόλουθος δ' ἦν καὶ τῷ βίῳ μηδὲν ἐκτρεπόμενος μηδὲ φυλαττόμενος, ἅπαντα ὑφιστάμενος ἁμάξας εἰ τύχοι, καὶ κρημνοὺς καὶ ὅσα τοιαῦτα, μηδὲν ταῖς αἰσθήσεσιν ἐπιτρέπων. σώζεσθαι μέντοι ὑπὸ τῶν γνωρίμων παρακολουθούντων. *Negabat quicquã turpe esse aut honestum; justũ aut injustum: eadẽ ratione in omnibus nihil vere esse, cæterum lege atque consvetudine cuncta homines facere. Neq; enim esse quicquam illud potius quam istud. Consentanea illi adhæc & vita erat; nihil declinans nihilq; devitans, sustinebat currus, si forte occurrissent, & prærupta & canes & talia, nihil omnino sensibus per mittens. Servabatur autem à sequentibus se necessariis* Enim vero cum nihil natura malum, hominive noxium diceret, sed tantum ex opinione ita videri: oportebat eum qvi Philosophum agere vellet, factis declarare, qvod verbis asserebat; ideoqve nec currus vitare, nec incursantes canes. Cæterum verbis quidem hanc ipsum Philosophiam tradidisse, & τὸ ἐπέχειν proposuisse; re vero & opere qvædam pro malis habuisse, Ænesidemus aliiq; apud eundem Laertium tradunt. Nam cum aliqvando canem sibi incursantem repulisset. eamq; ob rem à qvodam argueretur, qvod doctrinæ

suæ

ſuæ contraria faceret: reſpondit ὡς χαλεπόν ἔιη ὁλοχερῶς ἐκδῦναι ἄνθρωπον· διαγωνίζεσθαι δὲ ὡς οἱόν τε, πρῶτον μὲν τοῖς ἔργοις πρὸς τὰ πράγματα· ἐι δε μὴ, τῷ γε λόγῳ. *Quod perdifficile eſſet hominem penitus exuere. Certandum vero quantum quidem fieri poſſet, primum quidem operibus adverſum res: ſin minus; ſaltem ratione.* Verum in hiſce non opus erat hominem exuere. Si enim revera malum non erat qvod fugiebat: neq; opus erat ejus cauſa hominem exuere. Sed volebat aliqvid dicere; ne aliud verbis docere, aliud re præſtare videretur. Iſta ergo ſecta nullam ſapientiam nullamqve ſcientiam profitebatur: ſed cæterorum qvidem ſapientum dicta evertebat; tota autem ipſius ſcientia in eo conſiſtebat, qvod nihil ſciret. Qvoniam vero hujus ſectæ homines id unicum in omnibus qværebant, ut omnes ſcientias deſtruerent: ne Matheſin qvidem intactam relinqvere poterant, cujus tam claræ veritates, tam certæ demonſtrationes. Hanc ergo ſcientiam ut etiam everterent, varia conqviſiverunt, qvæ tamen talia ſunt ut ab nemine ſano admitti poſſint. In cæteris qvidem diſciplinis non ſolùm aliqvid probabile adferunt; ſed etiam aliqvando veriſſima produnt, ſicut qvando diſputant contra Aſtrologos aliosqve. Sed qvæ contra Geometriam proferunt ea plane abſurda, & communi hominum rationi, adeoqve ipſi veritati contraria. Qvod ut clarius pateat Sexti Empirici librum III. contra Mathematicos

qui inſcribitur contra Geometras diſcutiemus. Priores enim duo, Mathematicos proprie dictos non tangunt: prior enim ſcriptus eſt contra Grammaticos, ſecundus autem contra Rhetoras; ſicut neque poſteriores, præter ſolum quartum, qui eſt contra Arithmeticos. Quæ enim contra Muſicos & Aſtrologos libro V. & VI. proponit potius aliò ſunt referenda. Hujus igitur viri argumenta nunc examinemus.

CAP. III

Primum quod in Geometris accuſat Sextus Empiricus eſt, quod ad res ſuas demonſtrandas utantur hypotheſibus. Ita enim librum III. inchoat. Ἐπεὶ οἱ Γεωμέτραι συνορῶντες τὸ πλῆθος τῶν ἐπακολουθούντων αὐτοῖς ἀποριῶν εἰς ἀκίνδυνον εἶναι δοκοῦν καὶ ἀσφαλὲς πρᾶγμα καταφεύγουσι τὸ ἐξ ὑποθέσεως αἰτεῖσθαι τὰς τῆς Γεωμετρίας ἀρχὰς· καλῶς ἂν ἔχοι καὶ ἡμᾶς τῆς πρὸς αὐτοὺς ἀντιῤῥήσεως ἀρχὴν τίθεσθαι τὸν περὶ τῆς ὑποθέσεως λόγον. *Quoniam Geometræ, conſiderantes multitudinem dubitationum quæ ipſos conſequuntur, confugiunt ad rem quæ videtur tuta & remota à periculo nempe ut ex hypotheſi petant principia Geometriæ; bene erit ſi nos quoque contra eos dicendi principium ſumamus ex eo quod dicendum eſt de hypotheſi.* Et libro I. in ipſa totius operis præfatione ait hoc ſigillatim contra Geometras dici *quod non oporteat accipere principia ex hypotheſi.* πρὸς δὲ Γεωμέτρας περὶ τοῦ μὴ δεῖν ἐξ ὑποθέσεως λαμβάνειν

τὰς ἀρχάς. Explicat vero ipſemet quid per ὑποθέσεις intelligat, nempe non tragicam aut comicam hypotheſin quam actuum argumentum vocant; neque eam qua Rhetores utuntur, in quæſtione ſingularium, ſed quæ denotat principium demonſtrationum, ὑπόθεσιν καλοῦμεν ἀρχὴν ἀποδείξεων αἴτησιν οὖσαν πράγματος εἰς κατασκευήν τινος. *Hypotheſin vocamus principium demonſtrationum petitionem rei ad aliquid probandum.* Sed cũ tria principiorum genera Geometræ habeant, variaq; ſub nomine hypotheſeos comprehendantur ab hoc Auctore non explicata, ex mente ipſorum Geometrarum hanc vocem exponemus. Proclus ergo commentario ſecundo in 1. Element. Euclidis, pag. 22. hæc de principiis Geometriæ juxta Euclidem tradit. Ἔπειτα καὶ αὐτὰς διαιρεῖ (ὁ Εὐκλείδης) τὰς κοινὰς ἀρχὰς εἴς τε τὰς ὑποθέσεις καὶ τὰ αἰτήματα καὶ τὰ ἀξιώματα· διαφέρει γὰρ ταῦτα πάντα ἀλλήλων, καὶ οὐκ ἔστι ταυτὸν ἀξίωμα καὶ αἴτημα καὶ ὑπόθεσις, ὥς πού φησιν ὁ δαιμόνιος Ἀριστοτέλης· ἀλλ' ὅταν μὲν καὶ τῷ μανθάνοντι γνώριμον ᾖ, καὶ καθ' αὑτὸ πιστὸν παραλαμβανόμενον εἰς ἀρχῆς τάξιν, ἀξίωμα τὸ τοιοῦτόν ἐστιν, οἷον, Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. Ὅταν δὲ μὴ ἔχῃ μὲν ἔννοιαν ὁ ἀκούων τοῦ λεγομένου τὴν αὐτόπιστο, τίθεται δὲ ὅμως καὶ συγχωρεῖ τῷ λαμβάνοντι, τὸ τοιοῦτον ὑπόθεσίς ἐστι. Τὸ γὰρ εἶναι τὸν κύκλον σχῆμα τοιόνδε, κατὰ κοινὴν μὲν ἔννοιαν οὐ προειλήφαμεν ἀδιδάκτως· ἀκούσαντες δὲ συγχωροῦμεν ἀπο-

δεῖ-

δείξεως χρῄζεις. Ὅτε δὲ αὖ καὶ ἄγνωστον ᾖ τὸ λεγόμενον, καὶ μὴ συγχωροῦντος τοῦ μανθάνοντος ὅμως λαμβάνεται· τηνικαῦτα φησὶν αἴτημα τοῦτο καλοῦμεν, οἷον τὸ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας εἶναι. Quæ ita verto. *Deinde ipsa quoque communia principia dividit* (Euclides) *in hypotheses postulata & Axiomata. Differuut enim hæc invicem, neq; idem sunt Postulatum, Axioma & Hypothesis, sicut etiam divinus Aristoteles alicubi docet. Quando enim id quod pro principio assumitur, & discenti notum est, & per se manifestum ac fide dignum: tùm Axioma id vocatur. quale illud est: Quæ eidem sunt æqualia etiam inter se sunt æqualia. Cum vero auditor, cognitionem per se claram & certam non habuerit ejus quod dicitur; ponit tamen unà id ipsum & concedit assumenti: tum hypothesis est. Nam quod circulus talis sit figura, non quidem per communem notionem sine omni doctrina percipimus: quando vero id audimus statim concedimus absq; demonstratione. Quando autem id quod dicitur, neque cognitum fuerit auditori, neque ab ipso concessum, & tamen assumitur; tum illud postulatum dicimus. sicut illud, omnes rectos angulos invicem esse æquales.* Et hæc quidem ita explicari ait ab Aristotele; alios vero non tam accuratè hæc distingvere. Καὶ κατὰ μὲν Ἀριστοτέλους ὑφήγησιν τοιοῦτον διώρισθαι τὸν τρόπον Ἀξίωμα καὶ Αἴτημα καὶ Ὑπόθεσις. Πολλάκις δὲ καὶ ταῦτα πάντα καλοῦσιν ὑποθέσεις, ὥσπερ οἱ ἀπὸ τῆς Στοᾶς Ἀξίωμα

πᾶσαν ἀπόφασιν ἁπλῆν ὥστε κατὰ μὲν τούτους καὶ αἱ Ὑποθέσεις Ἀξιώματα. κατὰ δὲ τοὺς ἑτέρους καὶ τὰ Ἀξιώματα Ὑποθέσεις. *Et ſecundum Ariſtotelis quidem ſententiam hoc modo differunt Axioma Poſtulatum & Hypotheſis. Sæpe autem & hæc omnia vocantur Hypotheſeis, ſicut omnis ſimplex affirmatio Stoicis Axioma dicitur. Adeoq; his quidem ipſæ quoque Hypotheſes Axiomata ſunt: aliis vero ipſa quoq; Axiomata ſunt Hypotheſes.* Atq; hæc ultima verba diligenter ſunt conſideranda. neq; enim optimi Scriptores Geometræ hanc Hypotheſeos diſtinctionem accurate obſervant. Ariſtarchus quidem Samius in libro. Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀπο ςήματων Ἡλιού τε καὶ Σελήνης. *de magnitudine & diſtantia, Solis & Lunæ* (quod unum ex omnibus ipſius ſcriptis ſupereſſe arbitror) aliter voce Hypotheſeos videtur uſus fuiſſe: quem quidem ſcriptorem magni ſane nominis ſummæque auctoritatis Latine à ſe verſum edidit Federicus Commandinus vir de tota re Mathematica præſertim vero de antiquis Geometris optime meritus. Græcum vero textum ex tribus bonæ notæ Codicibus MSS. Bibliothecæ Regiæ Pariſienſis exſcripſi, quorum copiam, ſicut & aliorum omnium tam Regiæ quam propriæ Bibliothecæ MSStorum mihi fecerunt Clariſſimi & nunquam ſatis laudati Viri Petrus & Jacobus Puteani, quibus ſane ergo ob id aliaque in me collata beneficia plura me debere fateor quam præſtare poſſim. Is ſcriptor principio operis ſui

ſui à me nunc laudati ſex Ὑποθέσεις ut ipſe vocat præmittit, ex quibus ſua demonſtrare vult: quas omnes adſcribam, ut eo rectius judicari poſſit quid per vocem ὑποθέσεως intelligat.

Ὑποθέσεις ϛʹ. Α. Τὴν Σελήνην παρὰ τοῦ Ἡλίου τὸ φῶς λαμβάνειν. Β. Τὴν Γῆν σημείου τε κέντρου λόγον ἔχειν πρὸς τὴν τῆς Σελήνης σφαῖραν. Γ. Ὅταν ἡ Σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, νεύειν εἰς τὴν ἡμετέραν ὄψιν τὸν διορίζοντα τό τε σκιερὸν καὶ τὸ λαμπρὸν τῆς Σελήνης μέγιστον κύκλον. Δ. Ὅταν ἡ Σελήνη διχότομος ἡμῖν φαίνηται, τότε αὐτὴν ἀπέχειν τοῦ Ἡλίου ἔλασσον τεταρτημορίου, τῷ τοῦ τεταρτημορίου τριακοστῷ. Ε. Τὸ τῆς σκιᾶς πλάτος σεληνῶν εἶναι δύο. ϛʹ. Τὴν Σελήνην ὑποτείνειν ὑπὸ πεντεκαιδεκάτου μέρος ζῳδίου.

Hypotheſes ſex. I. Lunam à Sole illuminari. II. Terram ad Lunæ Sphæram puncti & centri rationem habere. III. Quando Luna biſecta nobis apparet, tum quidem maximum in ea circulum qui lucidum ab obſcuro diſterminat, verſus noſtrum aſpectum inclinare. IIII. Quando Luna biſecta nobis apparet tunc abeſſe illam à Sole minus quadrante circuli, parte quadrantis trigeſima. V. Latitudinem umbræ duarum eſſe Lunarum. VI. Lunam ſubtendere quintamdecimam partem ſigni. Ex his Ariſtarchi verbis liquet neque eum in generali ſenſu uſum fuiſſe voce ὑποθέσεως quo ipſa quoque axiomata comprehendit; neque ſpeciali, pro

iis quæ demonſtrari quidem nequeunt; conceduntur tamen ab auditore ſed per ὑποθέσεις id præcipue indicaſſe quod Proclus ex mente Ariſtotelis vocat poſtulatum. Neque enim vel prima vel ſecunda vel tertia hypotheſis aut certius cognita eſt ex ſe, aut facilius à quoquam admiſſa, quam illud, *Omnes anguli recti ſunt inter ſe æquales*. Poſteriores vero tres hypotheſes etiam falſæ ſunt, quod ex noſtri temporis obſervatis liquet. Neque enim Luna in quadraturis triceſimam partem deficit à quadrante, neque ſua diametro quintamdecimam partem ſigni ſeu duos gradus ſubtendit. quæ omnia ex fallacibus obſervationibus dependent. Hypotheſis igitur Ariſtarcho idem eſt quod Αἴτημα ſive poſtulatum Ariſtoteli. Sed neq; Archimedes ipſe voces has tam accurate diſtingvit. Libro enim I. de Sphæra & Cylindro, dicit primùm ſe ponere τάτε Ἀξιώματα καὶ τὰ λαμβανόμενα εἰς τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν, *Axiomata & ea quæ aſſumuntur ad horum demonſtrationem*. Recenſet vero partim definitiones quasdam, partim etiam hypotheſes. Omnibus autem recenſitis hæc demum verba ſubjungit Τούτων δὲ ὑποκειμένων *His ita ſuppoſitis*. Vocat ergo ſuppoſitiones id quod antea axiomata appellaverat. Libro vero primo *æquiponderantium*, ea quæ illeic axiomata dixerat, heic poſtulata vocat; & tamen hypotheſes. Adeo ut hypotheſis Archimedi ſit omne illud quo ad demonſtrandum aliquis quocunque modo utitur, non demonſtrato. Vi-

de

de Præfationem ipſius in librum de Conoidibus & Sphæroidibus ad Doſitheum. Hanc ergo ob cauſam Sextus quoque Empiricus per ὑποθέσεις Geometrarum intelligit omne id quod ſupponunt non demonſtratum, tam definitiones & poſtulata, quã Axiomata. Quoniam vero omnes ſcriptoris hujus cavillationes ex male vel intellecta vel uſurpata voce hypotheſeos fluant, operæ precium erit accuratius eam explicare. Præter eas ergo ſignificationes quas Sextus recenſet, denotat hypotheſis theſin aliquam cujus una pars vera eſt, altera falſa. Ariſtoteles Analyt. Poſterior. lib. 1. c. 2. θέσεως δὲ ἡ μὲν ὁποτερονοῦν τῶν μορίων τῆς ἀποφάνσεως λαμβάνουσα (οἷον λέγω τὸ εἶναί τι εἰ μὴ εἶναί τι) ὑπόθεσις· ἡ δὲ ἄνευ τούτου ὁρισμός. ὁ γὰρ ὁρισμὸς θέσις μέν ἐστι, τίθεται γὰρ ὁ Ἀριθμητικὸς μονάδα τὸ ἀδιαίρετον εἶναι καὶ τὸ ποσόν. Ὑπόθεσις δὲ οὐκ ἐστί. Τὸ γὰρ τί ἐστι μονὰς, καὶ τὸ εἶναι μονάδα οὐ ταυτόν. *Poſitionis duæ ſunt ſpecies, una hypotheſis dicitur cum alterutra pars enunciationis veluti aut eſſe aliquid aut non eſſe ſumitur: Altera eſt definitio in qua neutrum accipitur. Nam & definitio ſpecies poſitionis eſt. Ponit enim verbi gratia Arithmeticus unitatem eſſe indiviſibilem, & quantum. Nec tamen definitio eſt hypotheſis. Neque enim idem eſt dicere quid ſit unitas, & quod ſit.* Differt tamen & hypotheſis hæc & definitio ab Axiomate, ut hic auctor docet, verbis antecedentibus. Ἀμέσου δ᾽ ἀρχῆς συλλογιστικῆς θέσιν μὲν λέγω ἣν μὴ ἔστι δεῖξαι,

μηδ᾽

μηδ᾽ ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι. Ἣν δὲ ἀνάγκη ἔχειν τὸν ὁτιοῦν μαθησόμενον, ἀξίωμα. *Principium immediatum argumentationis duplex eſt. unum quidem theſis dicitur, quod demonſtrari non poteſt, nec tamen neceſſiario verum videtur illi qui hæc diſcere cupit. Si vero neceſſario verum fuerit Axioma appellatur.* Capite vero libri hujus VIII. ad quem locum ſine dubio reſpexit Proclus diſcrimen inter Hypotheſin & poſtulatum hoc ponit, quod ea quidem aſſumatur conſentiente illo qui erudiri vult, hoc autem, vel non conſentiente vel etiam contrarium ſentiente. Ὅσα μὲν οὖν δεικτὰ ὄντα λαμβάνει αὐτὸς μὴ δείξας, ταῦτα, ἐὰν μὲν δοκοῦντα λαμβάνῃ τῷ μανθάνοντι, ὑποτίθεται· καὶ ἔστιν οὐχ ἁπλῶς ὑπόθεσις, ἀλλα πρὸς ἐκεῖνον μόνον. Ἐὰν δὲ ἢ μηδεμιᾶς ἐνούσης δόξης, ἢ καὶ ἐναντίας ἐνούσης λαμβνάῃ· το αὐτὸ αἰτεῖται. Καὶ τούτῳ διαφερει ὑπόθεσις καὶ αἴτημα. *Quando vero aliquis ea aſſumit quæ alibi ſunt demonſtrata, neque ipſemet ea demonſtrat; tùm ſi quidem diſcenti eadem probentur, ſupponere iſta dicitur: ſi vero ea aſſumat quæ diſcenti vera non videntur, aut quorum contraria potius videntur; tùm poſtulare dicitur. Et hac re differt poſtulatum ab Hypotheſi.* Differunt ergo inter ſe hæc quatuor. Axioma, Definitio, Hypotheſis, Poſtulatum. Prius enim demonſtrari quidem non poteſt, neceſſario tamen verum eſſe deprehenditur. Alterum autem neceſſariò pro vero non recipitur; ſicut neque tertium; quæ eo quidem inter ſe diffe-

differunt, quod hoc alterutram enuntiationis partem admittat: illud vero ſimpliciter aliquid definiat: ambo tamen hòc à quarto diſtingvuntur, quod iſta quidem conſentiente auditore aſſumantur, hoc vero, ne quidem conſentiente. Quæ ut rectius intelligantur, Geometricis exemplis hæc omnia exponemus. Supponit Geometra dari longitudines, latitudines, & profunditates. & longitudines quidem poſſe concipi ſine latitudine, ac tum lineam vocat talem longitudinem; tùm quoq; eandem longitudinem poſſe conſiderari cum latitudine, ſed ſine profunditate, quam quidem ſuperficiem appellat. Si vero omnes tres dimenſiones conſiderentur corpus hoc appellat. Supponit etiam poſſe ſuperficiem varias figuras conſtituere, vel circularem, vel quadratam, vel aliam quamcunque. Si ergo quis hæc negaret, utique diceret Geometra, vel longitudo eſt, vel non eſt. Si non eſt, ergo omnes res una cohærent, ac inter nullas datur diſcrimen aut intervallum, imo omnia unum punctum conſtituunt. Cum ergo hæc falſa ſunt atque abſurda, patet longitudines ac latitudines eſſe, adeoque & lineas & ſuperficies & circulos & ſphæras cæteraque omnia. Hæc ergo ex hypotheſi poſita dicuntur, cujus tamen hypotheſeos nullus Mathematicorum meminit, quod de his neminem ipſis litem moturum confidant, adeoque hac in re vel ipſo Sexto Empirico teſte recte faciunt Geometræ quod hujus hypotheſeos nullam mentionem faciant. Verba ejus ſunt dicto libro.

Καὶ μὴν τὸ ὑποτιθέμενον πρᾶγμα ἤτοι ἀληθές ἐστι καὶ τοιοῦτον, ὁποῖον αὐτὸ ὑποτιθέμεθα, ἢ ψεῦδος. Ἀλλ᾽ εἰ μὲν ἀληθές ἐστι, μηδὲ αἰτώμεθα αὐτὸ, εἰς πρᾶγμα ὑποψίας πλῆρες καταφεύγοντες τὴν ὑπόθεσιν, ἀλλ᾽ αὐτόθεν λαμβάνωμεν, ἐπείπερ οὐδεὶς τ᾽ ἀληθῆ καὶ ὄντα ὑποτίθεται, καθάπερ οὐδὲ τὸ νῦν ἡμέραν εἶναι, ἢ ἐμὲ διαλέγεσθαι καὶ ἀναπνεῖν, ἡ γὰρ περιφάνεια τούτων τῶν πραγμάτων αὐτόθεν βέβαιον ἔχει τὴν θέσιν, καὶ οὐ διασταζομένην τὴν ὑπόθεσιν. *Res enim quæ suponitur vel vera est & talis qualis supponitur vel falsa. Quod si vera, ne eam petamus, neque ad rem suspicione plenam confugiamus nempe hypothesin, sed ipsam ex seipsa assumamus: quandoquidem vera & quæ vere existunt nemo supponit, sicut diem nunc esse aut me discurere vel respirare. quoniā enim hæc manifesta sunt per se etiam firmā habent demonstrationem, non vero dubiam hypothesin.* Et sane dari longitudines & latitudines adeoque lineas & superficies, tam certum est quam diem nunc esse, aut nos respirare. Et hæc quidem hypotheses vocari possent. Nec tamen Geometræ illas hypotheses intelligunt quando tales nominant, sed longe alias de quibus postea.

Quoniam ergo apud omnes in confesso est lineas, superficies ac cæteram Geometriæ materiam dari, ne de vocibus litigium oboriatur, voces suas primum explicant Geometræ, quibus singulas res nominant quæ in Geometria considerantur. Oportebat enim eos qui verissima prodere vellent & omnibus clara, illam quoque difficultatem tollere quæ ex ignoratis scien-

tiæ terminis oboriri poſſet, ac ſemel certo conſtituere, quæ nam res ſingulis verbis indicaretur, ne id quod de circulo demonſtraretur alius de parabola propoſitum crederet; aut quod triangulo Iſoſceli conveniret, cuivis triangulo applicaret. Definitiones igitur in Geometria nihil aliud ſunt quam vocum ac terminorum explicationes, quid nempe & quas res Geometræ talibus vocibus denotent. Sunt vero hæ ſimplices poſitiones, non quidem neceſſario veræ ſed quas nemo non conceſſerit. Ut verbi gratia Triangulum eſt figura tribus lateribus & tribus angulis conſtans. Simplex hæc aſſertio eſt nullam partitionem habens. Neceſſario quidem vera non eſt. Neque enim tam evidenter patet Triangulum talem eſſe fignram, ac bis bina eſſe quatuor. Nemo tamen talem ſuperficiẽ quæ tribus lateribus & tribus angulis clauditur, triangulum eſſe negaverit, nemo non conceſſerit hanc rem ita appellari poſſe.

Axiomata vero in Geometria neceſſario vera ſunt. Ut quæ eidem æqualia etiam inter ſe eſſe æqualia. Et æqualia æqualibus addita tota facere æqualia. Hæc enim neceſſario vera ſunt, de quibus omnes homines, etiam cæcus qui dignoſcere non poteſt utrum nox an dies ſit, certo pronuntiant hæc veriſſima eſſe.

Poſtulata vero & petitiones ad conſtructionem diagrammaton ſunt neceſſaria. Ideoque ſive auditor iſta mihi concedat, ſive non, ego tamen id mihi ſumo. Si enim Propoſitionem quandam demonſtraturus co-

piam peterem ducendi lineam v. g. à puncto A. ad punctum B. si auditor id mihi negaret, ego tamem id facerem meamque demonstrationem perficerem, cum ego æqua peterem, is vero iniqve ageret quod justa petenti non concederet.

Sunt vero præterea quædam alia apud Geometras quæ supponuntur sæpenumero falsa, ex quibus tamen ut veris argumentor. Ut v. g. demonstraturus in triangulo quodam rectangulo hypothenusam esse 10c pedum quando basis subtendens 30. gr. fuerit pedum ccc. suppono in triangulo v. g. ABC. in figur. n. I. AB. esse 300. pedum: quod tamen verum non est, vix enim octavam aut decimam partem pedis æquat. Sed istud quidem ita fit ob commoditatem demonstrandi. Ipsa autem demonstratio non in ipsis lineis consistit, sed in iis veritatibus; quæ ex claris axiomatibus demonstrantur, ut postea patebit. Atque hæ possunt proprie hypotheses dici. Hisce ita explicatis, nunc ipsius Sexti Argumenta audiamus.

CAP. IIII.

Primum ergo ipsius argumentum id concludere conatur, nullam demonstrationem aut certitudinem per hypothesin posse haberi. Epilogismo autem tali utitur. Ἤτοι ἰσχυρόν ἐστι καὶ βέβαιον πρὸς πίστιν τὸ ἐξ ὑποθέσεώς τι λαβεῖν, ἢ ἄπιστόν τι καὶ ἀσθενές. Ἀλλ' εἰ μὲν ἰσχυρὸν, καὶ τὸ ἀντικείμενον ἐξ ὑποθέσεως ληφθὲν πιστὸν γενήσεται καὶ βέβαιον, ὥστε θήσωμεν τὰ μαχόμενα. Εἰ δὲ, ἐπὶ τοῦ τὸ ἐναντίον ἐξ ὑποθέσεως λαμβάνοντος

χω-

χωρὶς ἀποδείξεως, ἄπιστόν ἐστιν, ἡ ὑπόθεσις ἄπιστος γενήσεται καὶ ἐπ' ἐκείνου, ὥστε οὐδέτερον αὐτῶν θήσομεν. Οὐ τοίνυν ληπτέον ἐστὶν ἐξ ὑποθέσεώς τι. Quæ ita verto (interpres enim ſicut in plurimis aliis locis ita heic quoque auctorem non intellexit, ſed ſenſum plane invertit). *Aut validum & fide dignum eſt ex hypotheſi ſumptum argumentum, aut invalidum & fide minime dignum. Si validum, ergo & contrarium ſi ex hypotheſi ſumatur verum erit & firmum, adeoque pugnantia invicem ponentur. Si vero contrario ex hypotheſi poſito ſine demonſtratione argumentatio falſa evadit, ergo & alterius hypotheſis incredibilis quoq; erit. ut neutrum ſit affirmandum. Nihil ergo accipiendum eſt ex hypotheſi.* Quæ quoniam non ſatis clara ſunt, nonnihil illuſtrare conabimur. Sexti argnmentum hoc eſt. Modus demonſtrandi ex hypotheſi vel legitimus erit verumque inveniet, vel non inveniet. Si non invenit verum, rejiciendus plane eſt. Si invenit, ergo omnis argumentatio ex hypotheſi ducta vera erit. Habet autem hypotheſis duo membra ut ex Ariſtotele explicatum, è quibus unum ponitur alterum tollitur. Veluti in hoc exemplo. Homo vel eſt animal rationale, vel irrationale: ſed eſt rationale, ergo non eſt irrationale. Heic demonſtratur hominem non eſſe animal irrationale ex hypotheſi. Sumo enim Hominem eſſe animal: Omne autem animal eſt vel rationale vel irrationale. Suppono autem eſſe rationale, quod tamen non demonſtro. Dicit ergo Sextus, quod ſi altera pars hypotheſeos ſumatur: tum concludi hominem eſſe

animal irrationale. Si enim dixerim, ſed eſt irrationale. Ergo concluſio erit non eſſe rationalem. Neutra ſubſumptio ex demonſtratione eſt, ideoque æque hoc dicere poſſum ac illud. At vero ultimo hoc modo falſum concluditur. ergo modus argumentandi per hypotheſin falſum concludit, ideoque legitimus ac probus non eſt. Hæc ſumma eſt argumenti hujus Pyrrhonici. Sed videndum quid contra Geometras concludat. De tali quidem Hypotheſi loquitur cujus una pars aſſumitur, altera rejicitur, quæ etiam propriè & ſtrictè ſecundum Ariſtotelem loquendo Hypotheſis appellatur. Verum tales Hypotheſes Geometria ignorat. Definitiones enim non dicunt lineam eſſe longitudinem latitudine carentem, vel non eſſe: ſed ſimpliciter ponunt lineam eſſe longitudinem. Ita in cæteris definitionibus. Sed neque Axiomata duo membra habent, verũ unam rem ſimpliciter affirmant: quod ipſum quoq; in Poſtulatis contingit. In ipſis quoque falſis hypotheſibus Geometræ ſimpliciter eam ponunt ex qua argumentantur, ut in triangulo ABC fig. I. ponunt ſimpliciter lineam AB. 300 pedum. Hoc ergo Sexti argumentum contra Geometras non eſt, & monſtrat ſe vel Geometricarum rerum plane rudem fuiſſe, vel inſignem rabulam agere voluiſſe qui conquiſitis adeo mendaciis veritatem undique obſcurare conetur, cujus generis homines optandum foret ut noſtra ætas ignoraret. ſed proh dolor nullum ſeculum hoc fæcundius. Cupiunt enim homines illudi amantque

que eos qui ſpecioſiſſimis verbis fraudem ſibi facere poſſunt: eos vero deteſtantur quibus veritas cordi eſt. Quippe pauciſſimi ſunt qui verã ſapientiam amant, pauciores adhuc qui intelligunt. Ideoque ſæpe nunc illud pluribus in locis contingit, quod Anacharſis quidam Schyta ſuo ævo apud Græcos notavit ὅτι λέγουσι μὲν οἱ σοφοὶ παρ' Ἕλλησι, κρίνουσι δὲ οἱ ἀμαθεῖς. *quod ſapientes quidem proponant apud Græcos: ſed indocti judicium ferant*. Verum fruſtra deploramus quæ corrigi nequeunt. Ad Sextum noſtrum revertamur, qui quidem primo ſuo argumento nihil contra Geometras evicit. videndum quid aliis præſtet. Pergit igitur Καὶ μὴν τὸ ὑποτιθέμενον πρᾶγμα ἤτοι ἀληθές ἐστι καὶ τοιοῦτον ὁποῖον αὐτὸ ὑποτιθέμεθα, ἢ ψεῦδος. Ἀλλ' εἰ μὲν ἀληθές ἐστι, μηδὲ αἰτώμεθα αὐτὸ, εἰς πρᾶγμα ὑποψίας πλῆρες καταφεύγοντες τὴν ὑπόθεσιν, ἀλλ' αὐτόθεν λαμβάνωμεν. ἐπείπερ οὐδεὶς τ' ἀληθῆ καὶ ὄντα ὑποτίθεται, καθάπερ οὐδὲ τὸ νῦν ἡμέραν εἶναι ἢ ἐμε διαλέγεσθαι ἢ ἀναπνεῖν. ἡ γὰρ περιφάνεια τούτων τῶν πραγμάτων αὐτόθεν βέβαιον ἔχει τὴν θέσιν, καὶ οὐ διασταζομένην τὴν ὑπόθεσιν. ὥστε εἰ ἀληθές ἐστι τὸ πρᾶγμα μηδὲ αἰτώμεθα αὐτὸ ὡς μὴ ὂν ἀληθές. Εἰ δὲ οὐκ ἔστι τοιοῦτο, ἀλλὰ ψεῦδος καλέστηκεν, οὐδὲν ὄφελος ἀνακόψει ἐκ τῆς ὑποθέσεως. Κἂν γὰρ μυριάκις αὐτὸ ὑποτιθέμεθα σαθροῖς ὥς φασι θεμελίοις οὐκ ἀκολουθήσει τὸ συμπέρασμα τῆς ζητήσεως ἐξ ἀνυπάρκτων ὁρμωμένης ἀρχῶν. Οὐ μὴν, ἀλλ' εἴ τις οἷς ἂν ὑποθῆται

θῆται τούτοις τὰ ἀκολουθοῦντα πιστὰ τυγχάνειν ἀξιώσει, μήποτε πᾶσαν ἀναιρεῖ ζήτησιν· εὐθέως γὰρ ὑποθήσεται ἕκαστος ἡμῶν τὸ τὰ τρία τέσσαρα εἶναι· καὶ τούτου δοθέντος συνάξει ὅτι καὶ τὰ ἓξ ὀκτὼ γενήσεται. Ἀλλὰ μὴν τὰ τρία τέσσαρα ἐστὶν ὡς ἡ ὑπόθεσις δίδωσι. τὰ ἄρα ἓξ ὀκτώ ἐστιν. *Id quod ſupponitur vel verum eſt vel falſum. Si verum; ne poſtulemus illud confugientes ad rem ſuſpicione plenam nempe hypotheſin: ſed ipſum illud aſſumamus. quandoquidem nemo vera & quæ exiſtunt ſupponit, ſicut nunc diem eſſe aut me diſcurere aut reſpirare. manifeſta enim harum rerum veritas, ex ſe firmam poſitionem habet, non vero dubiam hypotheſin. Si ergo verum eſt, ne petamus illud ac ſi verum non eſſet. Quod ſi autem non eſt ejusmodi, ſed falſum ſupponitur, nihil commodi exiſtet ex hypotheſi. Nam etiamſi eam ponamus millies, putridis ut ajunt fundamentis; non ſequetur concluſio quæſtionis, quæ proficiſcitur ex principiis inſufficientibus. Quod ſi quisquam ex quibuscunque ſuppoſitis, conſequentia vera elici dixerit, anne omnem is quæſtionem tollit? Statim enim unusquisque notrum ex hypotheſi ponet tria eſſe quatuor. Et hoc conceſſo colliget ſex octo eſſe. Si enim tria ſunt quatuor & ſex erunt octo. Sed tria ſunt quatuor ut ponit hypotheſis, ergo & ſex erunt octo.* Verum hæc omnia vel ex ipſius Sexti verbis refutantur. Diximus antea Geometras, Axiomata, Definitiones & Poſtulata, non eo modo in Geometricis ponere quo Hypotheſes dubias: ſed ut certa & cogni-

ta principiorum loco adducere, ut ſciat unusquisque quibus ex Principiis Geometræ ſua demonſtrent. Vanum ergo èſt ſophisma Sexti ea quæ vera ſunt non debere ſupponi, ſed ſimpliciter ut verum aſſumi. Neque enim Geometræ aliter quicquam faciunt: nec ideo Axiomata recenſent, aut Definitiones, quod de iis dubitent: ſed ut auditori exponant unde ſua probent. Nemo autem negabit Axiomata Geometrica majorem certitudinem habere quam illa, qvæ ut certisſima Sextus aſſumi contendit, nempe diem nunc eſſe. De hoc enim cæcus judicare non poteſt: de illis autem quivis ratione prædituſ. Nam eidem æqualia etiam inter ſe æqualia eſſe omnis ſanus affirmat. Si ergo illa quæ clara ſunt ac certa non dubiè, ſed abſolutè ponenda atque aſſumenda ſunt ut Sextus docet, utiq; principia Mathematica ut omnium certiſſima, vel ipſo fatente ſophiſta, neceſſario ſunt admittenda. Equidem in Trigonometricis aliquando illud contingit, ut linea quæcunque trium quatuorve pollicum ſupponatur trecentorum aut quadringentorum pedum, nempe ut in antea adducto exemplo, quando ad inveſtigandam longitudinem lateris AC. ſupponitur linea AB. partium 300. Omnia enim ſimilia triangula ſunt proportionalia. ut à Geometris demonſtratur. Qvæ ergo in minori triangulo inter latera fuerit ratio, eadem quoque inter latera majoris trianguli erit, modo hoc illi ſimile fuerit. Neque Geometra de illa linea demonſtrat quam in charta habet, ſed quæ per eam

denotatur. ut bene ab Aristotele est observatum Poster. Analyt. lib. I. cap. VIII. Οὐδὲ ὁ Γεωμέτρης ψευδῆ ὑποτίθεται ὥσπερ τινὲς ἔφασαν λέγοντες ὡς οὐ δεῖ τῷ ψεύδει χρῆσθαι· τὸν δὲ Γεωμέτρην ψεύδεσθαι λέγοντα ποδιαίαν τὴν οὐ ποδιαίαν ἢ εὐθεῖαν τὴν γεγραμμένην οὐκ εὐθεῖαν οὖσαν. Ὁ δὲ Γεωμέτρης οὐδὲν συμπεραίνεται τῷ τήνδε εἶναι γραμμὴν ἣν αὐτὸς ἔφθεγκται, ἀλλὰ τὰ διὰ τούτων δηλούμενα. *Neque vero Geometra falsũ supponit, ut quidã ajunt: dicentes non debere falsum supponi: id vero Geometram facere, cum pedalem lineam vocet eam quæ pedalis non est, & rectam quæ scripta est, cum tamen talis non sit. Sed Geometra non eo quicquam concludit quod hanc lineam talem dicat, sed eo quod hoc denotatur.* Omnia ergo Sexti Empirici argumenta quibus evincere conatus fuit, male Mathematicos ac sigillatim Geometras agere, quod demonstrare conentur sua ex hypothesi, falsa sunt ac frivola. Pergit porro ipsas quoque definitiones unamque omnino Propositionem in dubium vocare, de quo sequenti capite agemus.

CAP. V.

Postquam ea quæ contra hypotheses Geometricas à Sexto Empirico sunt allata satis refutaverimus, consequens videur, ut ea quoque falsi convincantur, quæ contra Definitiones ab ipso moventur. Dicit enim se ipsa principia Geometriæ falsitatis convincere velle, quo facto, ipsam quoque scientiam falsam esse conclu-

cludit. Sed nulla quidem alia is principia attingit quam ſolas Definitiones, atque in hoc omnem ſuum laborem ponit ut probet, lineæ, puncti, ſuperficiei & corporis definitiones à Geometris allatas, probas non eſſe. Primum ergo videndum nobis eſt, an hoc ſit principia Mathematicorum convellere aut eos falſi arguere: inde quam feliciter hoc ipſum præſtet.

Diximus antea definitiones in Geometricis nihil aliud eſſe quam vocum ſeu terminorum explicationes quibus utuntur. Quantam vero utilitatem id Lectori adferat, quod accurate ſciat quid ſingulis terminis indicetur, illis præcipue cognitum eſt qui aliquam his diſciplinis operam impenderunt. Niſi enim termini eſſent, non tam perſpicuè Geometræ mentem ſuam exponere poſſent. Longis enim verborum ambagibus uti cogerentur, multisque vocibus id explicare quod una fieri poſſet. Quantas vero tum Lectori tenebras offunderent, quantamque difficultatem rebus per ſe explicatu difficilibus adderent. At vero ſi voces quasdam ſimpliciter ponerent, ſine earum explicatione, perſæpe non intelligerentur ab aliis. Si enim quisquam multa de Parabolis, Ellipſibus aut Hyperbolis demonſtraret, neque explicaret quas lineas hiſce vocibus indicaret, ſurdis fabulam narraret. Neceſſariæ ergo ſunt vocum explicationes in Geometricis, ut unus alterum intelligat, facilique negocio ſemel diſcat, quid omnibus in locis tali voce deſignet. Imponit vero Mathematicus nomina ſuis rebus non ſemper quidem opti-

ma & convenientiſſima, ſed ea quæ primum ipſi occurrunt. Neque ſane homini, rebus graviſſimis maximæque utilitatis adeo intento, vitio verti debet, ſi minus proprie loquatur. Qui vero de vocum proprietate ſunt ſolliciti, meliores poſſunt introducere, veritate eadem retenta ac illæſa. Quin etiam alias definitiones earundem rerum in medium adferre, ſi prædeceſſorum minus commodæ, minusve ſufficientes fuerint. Ita Apollonius Pergæus definitionem Coni ab Euclide lib. XI. propoſitam generaliorem reddidit, ut non tantum conis rectis, ſed etiam ſcalenis conveniret. Neq; tamen ideo vel Euclidem refutavit falſive accuſavit, vel principia Mathematica deſtruxit aut dubia reddidit.

Præterea videndum omnino erit quales veritates Definitiones Geometricæ contineant. Nempe ſupponunt tales res de quibus agunt in natura exiſtere: & cum exiſtant, ſimpliciter indicant ſe de iis rebus demonſtrare quæ talem naturam habent. Sic v. g. ſupponit Geometra dari longitudines & latitudines, & poſſe longitudinem conſiderari ſine latitudine, quam tum quidem lineam dicunt. Hanc vero terminos ſuos ſive extrema habere, quæ puncta dicuntur. Poſſe etiam lineas tales invicem jungi, & pro diverſa conjugatione diverſas Figuras facere. Quæ qui negaverit, næ idem interdiu ſolem lucere negabit. Sunt enim clariſſima per ſe, & tam certa quam illa quæ Sextus ut certiſſima ſine hypotheſi ponenda vult. Verum Sexti ipſius verba audiamus. Μετελθόντες δὲ ἑξῆς διδάσκωμεν ὅτι

ψευ-

ψευδεῖς καὶ ἀπιθάνους αὐτῶν συμβέβηκεν εἶναι τὰς ἀρχὰς τῆς τέχνης. εὐθέως τοίνυν ὡς πρῶτόν τι καὶ στοιχειωδέστατον διδάσκουσιν ἡμᾶς ὅτι σῶμα μὲν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἔχον διαστάσεις, μῆκος, πλάτος, βάθος, ὧν πρώτη μὲν διάστασις ἐστιν ἡ κατὰ μῆκος, ἄνωθεν κάτω, δευτέρα δὲ ἡ κατὰ πλάτος ἀπὸ δεξιῶν ἐπ' ἀριστερὰ, τρίτη δὲ ἡ κατα βάθος ἀπὸ τῶν πρόσω εἰς τοὐπίσω. στιγμῆς μὲν γὰρ ῥυείσης γραμμὴν γίνεσθαί φασι. γραμμῆς δ' ἐπιφάνειαν. ἐπιφανείας δὲ στερεὸν σῶμα, παρὸ καὶ ὑπογράφοντες λέγουσι στιγμὴν μὲν εἶναι σημεῖον ἀμερὲς καὶ ἀδιάστατον ἢ πέρας γραμμῆς. γραμμὴν δε μῆκος ἀπλατὲς ἢ πέρας ἐπιφανείας· ἐπιφάνειαν δὲ πέρας σώματος ἢ πλάτος ἀβαθές. *Pergentes autem deinceps dicemus quod falſa & non probabilia contingat eſſe ipſorum artis principia. Statim ergo nos docent tanquam primum & quod maxime accedit ad naturam elementi, quod corpus ſit id quod habet tria intervalla ſeu dimenſiones longitudinem, latitudinem & profunditatem. Quarum quidem prima dimenſio eſt per longitudinem ſuperne deorſum: Secunda autem per latitudinem à dextris ad ſiniſtra: tertia autem per profunditatem ante & retro. Si ergo punctus fluxerit, dicunt fieri lineam, ſi linea autem, ſuperficiem, ſin vero ſuperficies, corpus ſolidum. Deſcribentes igitur dicunt punctum eſſe ſignum carens partibus, & quod nullum ſuſcipit intervallum, aut terminum lineæ. Lineam autem longitudinem carentem latitudine, aut terminum ſuperficiei. Superficiem autem terminum corporis, aut latitudinem carentem*

tem profunditate. Atque hæc quidem refutare conatur, ac evincere nec punctum, nec lineam, nec superficiem Geometricam quicquam esse. Verum satis clare his demonstrat, non se veritatem quærere, sed tantum quomodo possit veritati contradicere. Etenim dari res quasdam quæ longitudinem, latitudinem & profunditatem habeant, non minus clarè patet, quam Solem lucere, aut me nunc respirare. Imo de eo quidem etiam illi judicare possunt, qui hæc vera esse certo dicere nequeunt. Nam interdiu clarum esse cæcus non dicet. Neq; cæcus aut surdus accurate judicabit quod ego respirem. Sed quod longitudinem latitudinem & profunditatem habeam uterque probe novisse potest, & de seipso aliisque rebus idem judicium ferre. Talem vero rem corpus Mathematici vocant. Si ergo datur res quæ longitudinem latitudinem & profunditatem habet, datur etiam illud quod Mathematici corpus vocant. Datur preterea longitudo & latitudo & profunditas, & ut res distinctæ tam separatim, quam conjunctim considerari possunt. At si longitudo consideratur sine latitudine, est quidem id linea. Linea enim definitur Geometris μῆκος ἀπλατές. *Longitudo sine latitudine.* Sunt enim res distinctæ longitudo & latitudo, ideoque facile unum sine alio concipi potest. Quis enim negaret in superficie ABCD fig. n. 1. cujus longitudo sit AB latitudo AD. posse solam longitudinem, utpote rem à latitudine distinctam, per se concipi. At vero longitudo ita considerata, quoad latitudinem

nem dividi nequit, nec ullas partes in latitudine habet. Eſt vero talis linea terminus ſuperficiei & extremum illud quod non tam oculis incurrit, quam mente concipitur, in quo ſuperficies illa deſinit. Si ergo extremum ſuperficiei & integra linea tam ſeparata concipi poſſit, ut nullo modo diviſionem in latitudine admittat; quidni etiam extremum lineæ hoc modo concipi poſſit, ut nullam longitudinem habeat. Extremum enim id eſt quo nihil eſt exterius. at in ſuperficie quidem, quodcunque ullam latitudinem habet, id dividi poteſt. & per conſequens una hujus pars exterior erit; altera interior: adeoque neque illud extremum erit. Ita etiam in longitudine, id extremum erit quod dividi ſecundum longitudinem non poteſt. Si enim dividi poteſt, partes habebit, quæ ambæ quidem extremum illud conſtituere non poſſunt, unum enim eſt extremum. Quoniam ergo exttemum quod eſt in longitudine, ſeu terminus lineæ, nullo modo diviſionem in longitudine partesve habeat, utique omnino erit indiviſibile. Eſt enim extremum non ſuperficiei ſed lineæ. At linea antea demonſtrata fuit nullas in latitudine partes habere: atque ex eodem principio conſtat neq; ſecundum profunditatem poſſe dividi. Punctus ergo lineæ terminus neque in longitudine, neque in latitudine, neque in craſſitie ſeu profunditate ullas partes habet, adeoque eſt indiviſibilis. Sexti vero argumenta quod attinet ne hili quidem ſunt. In puris enim cavillationibus conſiſtunt. Ἡ τόινυν στιγμὴ ἣν φασι σημεῖον ἀδιά-

ἀδιάστατον ὑπάρχειν, ἤτοι σῶμα νοεῖται, ἢ ἀσώματον. Καὶ σῶμα
μὲν οὐκ ἂν εἴη κατ' αὐτούς. τὰ γὰρ μὴ ἔχοντα διάστασιν, οὐκ εἶναι
σώματα. λείπεται οὖν ἀσώματον αὐτὴν ὑπάρχειν, ὃ πάλιν ἐστὶν ἀπί-
θανον. Τὸ μὲν γὰρ ἀσώματον οὐδενὸς νοεῖται γεννητικόν, ὡσανεὶ ἀθι-
γὲς καθεστώς. ἡ δὲ στιγμὴ νοεῖται τῆς γραμμῆς γεννητική. οὐ τοί-
νον ἐστὶν σημεῖον ἀδιάστατον ἡ στιγμή. *Punctus igitur (quem
ſignum eſſe dicunt nullum habens intervallum) aut cor-
pus concipitur eſſe, aut incorporeum. Sed corpus qui-
dem ſecundum illos non eſt. Quæ enim intervalla non
habent neque corpora ſunt. Reſtat ergo ut incorporeum
dicatur. Quod rurſum eſt abſurdum. Incorporeum e-
nim nihil poteſt generare, cum minime tangi poſſit. In-
telligitur autem punctus gignens lineam. Non eſt ergo
punctus ſignum, nullum habens intervallum.* Sed du-
plicem heic quidem committit errorem, primum in
voce generationis, ſecundum ſupponendo falſum me-
dium terminum. Neque enim Geometræ voce gene-
randi eo modo utuntur quo Phyſici in generatione u-
nivoca aut æquivoca; ſed illud quod aliud quocunque
modo efficit etiam modo ſenſibus plane imperceptibi-
li & tantum intellectui obvio. Ideoque quando hac in
re adhibent vocem γένεσις, ſolam nudamque conſtru-
ctionem intelligunt. Sed neque abſolute verum eſt,
id quod in argumentatione pro medio termino ſup-
ponit, illud nempe quod generatur debere humano
tactui obvium eſſe. Etenim qui minima iſta animalcu-
la conſideraverit, ut pulices aliasque, earumque con-
jun-

junctionē viderit, non dicat id quod generat tangi necessario debere. Sed & multa animalia sunt pulice minora, quæ vix integra tangi possunt, nedum partes tam exiles, quibus tamē generant de qvibus postea accuratius. Sed ut ad rem revertamur, non de factione, aut generatione Physica heic sermo est, sed de Geometrica. Posse autē lineam ex puncto circūducto produci, is minime negabit qui aliquid in rebus ad sapientiā spectantibus noverit. Sit enim planū quoddā ABCD in fig. n. 1. cujus basis sit AB erectū super aliud planū AQ ad angulos rectos. Cū ergo superficies DCAB ulterius in latitudine dividi nō potest, remanet linea AB indivisibilis, cujus extrema sunt A & B puncta, quæ post infinitā lineæ AB divisionem remanent indivisibilia. Maneat punctum B immobile, punctum vero A circumducatur. certum est extremum lineæ AB, hoc est punctum A, describere lineam circularem AE. Si vero ambo puncta æquali motu ferantur, tum utrumque lineam describere rectam: & punctum quidem B, lineam BE; punctum vero A rectam AF. atque eodem tempore totam lineam AB integram superficiem AF BF. formare: quæ quidem tam clara sunt ut ab nemine negari possint, qui modo recte hæc conceperit. Quoniam vero dubium aliquod heic hærere posset; quo modo linea in infinitum ita dividatur, ut semper in minores minoresque partes secetur, idque in infinitū; quomodo etiam extremum illud, quod punctum Mathematici dicunt, indivisibile sit, aliamque naturam habeat: de hoc sequenti capite agemus.

CAP. VI.

Dicimus ergo lineam quamcunque termina tam in infinitum dividi posse: terminum vero lineæ esse indivisibilem. Quod ut demonstretur, suppono cognita & demonstrata ex Euclide lineam posse dividi bifariam, de quo postea: & duo latera cujusvis trianguli rectilinei majora esse reliquo.

Sint nunc in figura n. 11. extrema duorum planorum rectæ lineæ AC & AB. quæ quidem jungantur invicem circa A ita ut concurrant. Extremitates porro earum C & B jungantur invicem recta CB. Dividatur CB bifariam in E. in linea autem AC ponatur recta CF æqualis ipsi CE: & in AB recta BH æqualis BE. dico CF & BH non concurrere. Si enim concurrerent triangulum constituerent, una cum recta linea CB. At tum CB, unum latus hujus trianguli, esset æquale FC & HB. binis lateribus ejusdem trianguli, quod est absurdum: ergo FC & HB non concurrunt. Ducatur porro ab F ad A recta, atq; illa dividatur bifariam in G. in recta autem AF sumatur recta linea FK æqualis FG, & in recta AH, æqualis ipsi HG, recta HI. non tamen concurrent KF & HI. Si enim concurrerent, constituerent triangulum una cum linea FH. at sic duo latera trianguli rectilinei KF & IH essent æqualia reliquo, quod est absurdum, sunt enim necessario majora. Cum ergo KF & HI non concurrant, ducatur recta à K. ad I. dividaturque bifariam in L. & in recta AK sumatur linea KM. æqualis ipsi KL, & IN

æqua-

æqualis ipſi IL. ut ambæ KM & IN æquentur toti KI: dico rectas KM & IN non concurrere. Si enim concurrerent, facerent cum linea KI triangulum, & ſic duo latera, ejusdem trianguli rectilinei, non eſſent majora reliquo, ſed illi æqualia, quod eſt abſurdũ. Si igitur progrediar conjungendo MN, & dividendo rectam bifariam in O, & ſumendo partes æquales PM. & QN ipſis OM & ON, neque concurrent PM & QN, neque ſi jungatur PQ recta, atque in R. dividatur bifariam, partesque PS & QT ſumantur æquales PR & QR, ipſæ PS & QT concurrent. Neque enim duo latera ejusdem trianguli rectilinei reliquo vel minora vel æqualia eſſe poſſunt, ſed neceſſario ſunt majora. Atque illud ſicut ſemper & in omnibus rectis lineis verum eſt, ita etiam manifeſtum reddit lineas rectas in infinitum dividi poſſe, eisdemque in infinitum partes detrahi & auferri. ſicut lineis AC & AB, partes CF. FK. KM. MP. PS: SX. Xα. αδ. & BH. HI. IN. NQ. QT. TY. Yβ. βε. & ſic in infinitum progrediendo, detrahuntur. Lineæ vero quæ inter FH. KI. MN. PQ. ST. XY. αβ. δε. & ſic in infinitum ducuntur, etiam bifariam in infinitum ſecantur. Si enim linearum intermediarum una dividi ulterius nequiret, non dicam quoad ſenſum, ſed quoad intellectum; tum linea ulterius non eſſet, ſed illud quod Mathematici punctum appellant, cujus pars nulla. Si vero punctum eſſet, tum lineæ quæ ad latera ſunt concurrerent. ut verbi cauſa ſi quis

diceret lineam $\delta\varepsilon$ non posse secari, non ergo linea esset, sed punctum: adeoque $\alpha\delta$ & $\beta\varepsilon$ in eo puncto concurrerent, & cũ $\alpha\beta$ triangulum facerent. At $\alpha\delta$ æquatur dimidiæ $\alpha\beta$, & $\varepsilon\beta$ etiam æquatur dimidiæ $\alpha\beta$, ideoque tota $\alpha\beta$ æquatur duobus lateribus ejusdem trianguli rectilinei $\alpha\delta$ & $\beta\varepsilon$ quod est absurdum. Non concurrunt ergo $\alpha\delta$ & $\varepsilon\beta$. ideoque neque punctum illic est, sed linea $\varepsilon\delta$: quæ ideo secari in partes potest. Atq; hoc ita in infinitum procedit.

Quod si dicatur non posse in infinitum partes auferri à lineis AC & AB, sed lineæ quidem AB, post ablatam ultimo loco $\varepsilon\beta$, ipsi vero AC, post ablatam $\delta\alpha$, nihil ultra tolli posse: nihil ergo ex lineis AC & AB residuum erit. quamdiu enim aliquid est, tolli potest. quod vero non est, neque tollitur: ergo terminus & extremum lineæ AC erit in δ. & AB. in ε. Quoniam ergo dictum fuit principio lineas AB & AC concurrere circa extrema versus A. ergo concurrent circa $\delta\varepsilon$: adeoque & lineæ $\alpha\delta$ & $\beta\varepsilon$. partes linearum AC & AB concurrent circa $\delta\varepsilon$. Unde triangulum erit constructum ex $\delta\alpha$ $\alpha\beta$ & $\beta\varepsilon$. sed $\delta\alpha$ est dimidium ipsius $\alpha\beta$, & $\beta\varepsilon$ etiam dimidium ipsius $\alpha\beta$: ergo latus unum trianguli rectilinei $\alpha\beta$ erit æquale binis ejusdem trianguli lateribus, quod est absurdum. Non ergo concurrent CA & BA circa

pun-

puncta δ. ε. ideoque ista puncta neque eorum extrema sunt. unde adhuc aliquid ipsis auferri potest. Et hoc ita in infinitum procedit.

Ex quibus manifestè demonstratum est, primo, lineas rectas in infinitum dividi posse, & à quacunque linea recta semper partem aliquam posse auferri: secundo, duas rectas concurrentes se invicem in puncto necessario contingere.

Cum enim AC & AB non concurrant in eo quod dividi potest, sed indivisibili: ergo concurrunt in puncto. At quandiu pars dimidia lineæ intermediæ lineis vel AB vel AC demi potest, non concurrunt. Partes enim quæ demuntur, æquales sunt lineæ intermediæ: ideoque si concurrerent, triangulum rectilineum haberet unum latus reliquis duobus lateribus æquale, quod est absurdum. At lineæ AB, AC in infinitum dividi possunt, partesque iis in infinitum detrahi: ergo neque in infinitum concurrere possunt, quatenus lineæ sunt, hoc est divisibiles: sed necessarium est, ut concursus fiat in indivisibili, hoc est in puncto.

Habemus ergo necessario aliquid indivisibile quod nullo modo dividi potest: & habemus præterea illud qnod in infinitum dividi potest. Neque enim ulla in recta linea divisio concipi potest, quin statim alia harum partium divisio sequatur. Si enim id non esset concurrerent latera , & per consequens triangulum constituerent cujus duo latera tertio æqualia. Nulla ergo linea quamvis in infinitum dividatur, in puncta

dividetur. Neque ulla tam minuta lineæ pars ſumi poteſt, quæ, quàmvis in centum mille partes ſecetur, unquam punctum fiet. Si enim fieret, tum eſſet indiviſibile: at ſi indiviſibile, ulterius dividi non poſſet. Ergo linea in infinitum non divideretur. At demonſtratum & lineam in infinitum dividi. Cum ergo linea in puncta dividi non poſſit, neque ex punctis componitur. Ex quo enim aliquod componitur, in idipſum reſolvitur ac dividitur. At linea in puncta nullo modo dividitur: ergo neque ex punctis componitur. Punctus quidem unicus fluens aut motus gignit lineam: non tamen jungendo ſe cum aliis punctis, ſed ſimpliciter motum ſuum peragendo. In quacunque ergo linea, infinita puncta ſumi poſſunt. Nam omnis diviſio fit in puncto. ergo, cum cujuscunque lineæ infinitæ ſint diviſiones, etiam infinita in quacunque linea erunt puncta. Neque in majore longioreve linea plura erunt puncta quam in breviori & minori. Quod ut intelligatur, ſequenti capite demonſtrationem quandam Geometricam hujus rei proponemus.

CAP. VII.

Suppono in hac demonſtratione circulum, ſi ſuper planum æqualiter ac perpendiculariter circumvolvatur, et ad easdem ſemper partes, à puncto quodá in peripheria usque ad idem punctum, deſcribere lineam rectam æqualem circuli peripheriæ: quod etiam quivis ſatis per ſe intelliget, modo figuram n. 4. paulo diligentius inſpexerit. Circulus enim ABD concipiatur de-

devolvi in plano quodam perpendiculariter, motu æquali, ad easdem semper partes versus HC: dico eum quidem in hoc plano describere lineam rectam AC. Circumvolvatur circulus usquedum B tangat lineam AC v. g. in L, dico AH æqualem esse ipsi AB. Eodem vero modo circumvolvatur circulus EGPO super EH, ita quidē ut G tangat lineā EH, in puncto I. Recta ergo EI. minor erit quam recta AL. Etenim cum peripheria circuli ABD major sit, quam peripheria circuli EGPO: major etiam erit recta, æqualis peripheriæ circuli ABD, quam recta æqualis peripheriæ EGPO. & per consequens, quadrans illius major quadrante hujus. EI. ergo recta linea descripta à quadrante peripheriæ circuli EGPO minor est, quam AL recta descripta à quadrante circuli ABD. Sit nunc OPGE circulus insertus circulo ABD, ita ut uterque super eodem centro F simul circumgyrentur. Promoveatur ABD circulus versus C. in plano AC. etiam EGPO promovebitur eodem tempore in plano EH, describens lineam EH. Neque peripheria circuli EG unquam discedet à recta EH, non magis quam peripheria AB à recta AC. At ubi quadrante majoris circuli peracto, punctum B fuerit in L: centrū circuli F erit in K. per.xix.III.Elem. recta enim KL est perpendicularis ipsi AC. Ergo FB faciet lineam KL. & per consequens G erit in R. Linea ergo circularis EG. describet lineam ER. Si ergo linea ex punctis componitur: quot igitur puncta in linea EG tot etiam erunt in ER. semper enim EG tangit ER in pun-

puncto: ideoq; ſicut hujus puncta mutantur, ita etiam illius puncta mutantur, adeoque ſingula puncta EG tangent ſingula puncta ER. Et quoniam EG incipit cum linea ER in puncto E, & terminatur cum linea ER in puncto R, ſeu G: ergo quot puncta fuerint in EG, tot etiam erunt in ER. Sed eodem modo, quando EG decurrit in plano EH, non moto circulo ABD, deſcribet lineam EI. ergo, quot puncta fuerint in EG, tot etiam erunt in EI. nam incipiente EG incipit EI: & terminante EG, terminatur EI. & ſemper quamdiu EG ſuper EI movetur, tangunt ſe invicem in puncto. quot ergo puncta fuerint in una linea, tot erunt in altera. Sed antea diximus tot puncta eſſe in ER quot in EG. ergo tot erunt in ER quot in EI. Ergo linea maxima tot habebit puncta qvot minima. Verum ſi linea ex punctis eſſet compoſita: ergo qvò plura puncta linea haberet, eo major eſſet: & quo pauciora, eo minor. quod tamen non fit. Ergo linea ex punctis non componitur.

Atque ex his refutatur alterum Sexti argumentum. Εἴγε μὴν σφαῖρα καθ' ἓν σημεῖον ἀξιοῦται τῆς ἐπιπέδου ἅπτεσθαι, ἐκκυλιομένην τε γραμμὴν ποιεῖν, δῆλον ὡς ἐπικαταπιπτόντων σημείων τὴν ὅλην συντιθέντων γραμμὴν, τοίνυν εἰ τοῦ μεγέθους τῆς γραμμῆς συμπληρωτικόν ἐστι τὸ σημεῖον, ἕξει καὶ αὐτὸ μέγεθος. συγκεχώρηται δὲ τοῦ μεγέθους τῆς γραμμῆς συμπληρωτικὸν αὐτὸ τυγχάνειν· καὶ αὐτὸ ἄρα μέγεθος ἕξει καὶ οὐκ ἀδιάστατον γενήσεται. *Si enim probetur ſphæram in uno puncto planum contingere, & circumrotatam, lineam deſcribere: manifeſtum*

est, quod cum insequentia se invicem puncta totam lineam componant, ipsum quoque punctum magnitudinem habeat, quandoquidem lineæ magnitudinem expleat: Conceditur autem punctum explere magnitudinem lineæ, ergo & magnitudinem habebit, neque indivisibile erit. Sed non conceditur punctum lineæ magnitudinem augere: si enim id verum foret, ergo quæ plura haberet puncta major linea esset, quam quæ pauciora: & vice versa, linea major plura haberet puncta quam minor. Verum ista omnia ex adducta antea demonstratione refutantur Eadem enim circuli portio EG describit lineam EI. & lineam ER. ergo æqualia numero puncta istæ duæ lineæ haberent, & ex doctrina Sexti æquales essent: quod tamen falsum est. ER enim multo major est quam EI. Non ergo punctum auget magnitudinem lineæ; neque est lineæ pars. quomodocunque enim linea secatur, & in quotcunque partes, nunquam partes lineæ erunt puncta, sed lineæ, quamvis minutissimæ: quandoquidem linea in infinitum secatur, adeoque in infinitum progrediendo partes lineæ semper sunt divisibiles; punctum vero nulla ratione est divisibile, ut antea est demonstratum.

Mirabilis sane est hæc indivisibilium & in infinitum divisibilium natura, quæ limites humani ingenii excedit. Quippe intellectus noster sicut natura sua finitus est, ita infinita minime capit: quod alio quodam non inutili exemplo illustrabo, quo Galilæus Galilæi insignis summoque ingenio præditus Mathematicus,

in ſuis demonſtrationibus de motu locali &c. uſus eſt. Ex principiis Arithmeticis conſtat poſſe numerum quemcunque in ſe multiplicari. Numerus autem in ſe ductus dat quadratum: ipſe autem numerus radix vocatur. Cum ergo omnis numerus poſſit ex ſe quadratum generare, ergo omnis numerus alicujus quadrati radix erit. Quot vero radices ſunt, tot etiam dantur quadrata: quævis enim radix ſuum habet quadratum. Si enim radix in ſe multiplicetur generat quadratum. Dicendum ergo foret, quot ſunt numeri, tot etiam ſunt radices. Nullus enim dari poteſt numerus qui non poſſit in ſe duci, adeoque quadratum ex ſe progignere. Quot ergo ſunt numeri, tot etiam ſunt radices. At vero quot radices, tot etiam ſunt quadrata. Ergo quot numeri ſimplices, tot etiã ſunt quadrati. At hoc ultimũ verum non eſt. Ab unitate enim usque ad denariũ incluſive, decẽ quidẽ ſunt numeri ſimplices, ſed duo tantũ quadrati, quaternarius nempe & novenarius, vel numerando unitatẽ, qui ſui ipſius quadratum efficit, tres. Ab 11 porro ad 100 numeri quidem ſunt 90 ſimplices, ſed quadrati tantum ſeptem. nempe, 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. adeoque inter unitatem & centenarium incluſive numeri quidem erunt 99. quadrati vero ſine unitate 9. cũ unitate 10. Inde autẽ ad 1000. numeri ſimplices ſunt 900: quadrati autẽ ſolummodo viginti & unus, hoc eſt in mille numeris, quadrati triginta & unus. Porro in decẽ mille numeris ubi ad myriadẽ aſcendimus, quadrati tantum ſunt centum. Quod ſi numeri,
qvi

qui 10000 excedunt usque ad 1000000 inclusivè, sumantur, erunt illi quidem 990000, quadrati autem nongenti, adeoque in simplicibus numeris 1000000, quadrati erunt 1000. Inter numeros ergo ab unitate ad centenariũ vix tertia pars est quadratorum. Ab unitate verò ad centenarium, pars decima est quadratorum. A centenario ad millenarium, quadrati partem simplicium numerorum explent quadragesimam quintam, ab unitate autem ad millenarium partem fere tricesimam secundam. A millenario ad myriadem, pars centesima quinquagesima sexta est quadratorum, ab unitate autem ad myriadem pars centesima. Denique à myriade ad millionem (ut vocant) pars tantum millesima & centesima quadratos habet numeros, ab unitate vero ad millionem pars millesima. Numeri ergo simplices decadis, triplo plures sunt quam quadrati: & Hecatontadis, decuplo plures: Chiliadis autem, trigecuplo: Myriadis vero, centuplo. Denique in millione ut vocant seu myriade myriadum, numeri simplices millecuplo plures sunt quam quadrati. Atque si in infinitum progrediatur, quo plures numeri; eò semper pauciores quadrati. Id ergo quod ex clara, ut videtur, certaque ratione pro certo veroque concluditur, verum tamen non est. Alia enim est natura finitorum alia infinitorum. Si enim simplex numerus res finita foret, ita ut dari posset ultimus numerus simplex quo alius major non esset: tum etiam dari possent totidem numeri quadrati. Si enim diceretur millenarium o-

nium numerorum ſimplicium maximum eſſe, ut hoc nullus major daretur, tum omnes numeri ſimplices mille omnino eſſent, iidemque omnes radices, qui in ſe multiplicati mille quadratos generarent, & ſi quadrati cum ſuis radicibus multiplicarentur, mille prodirent cubi, & ſic mille quadrato quadrati, & mille cubocubi.&c. Sed non ita eſt: numerus enim in infinitum augeri poteſt, neque aliquis ſumi, qvin eo major detur. Quod ſi ad cubos, quadratoquadratos, cuboquadratos, cubocubos, cæterosque ejus generis numeros progrediamur, argumentum quidem eodem modo verum videbitur: ſed re & opere falſum eadem via deprehendetur. Quot enim numeri, tot radices: nullus enim numerus eſt, qui non in ſeipſum multiplicari poſſit, adeoque quadratum ex ſe gignere. At quod quadratum ex ſe generat radix eſt. Sed eodem modo poteſt etiam omnis radix cum ſuo qvadrato multiplicari, unde naſcitur cubus. Cum ergo omnis radix habeat ſuum quadratum, omne autem qvadratum cum ſuo radice multiplicatum cubum generet: ergo quot radices, tot cubi. At vero propoſitum fuit tot eſſe radices, qvot numeros: omnis enim numerus in ſe multiplicari poteſt & qvadratũ generare. Adeoq; omnis numerus eſt alicujus qvadrati radix. Ergo qvot numeri ſunt, tot etiam cubi erunt. Porro radix ducta in cubum dat biqvadratum ſeu qvadratũ in ſe ductum, qvartive ordinis numerum. Rurſus radix in hunc ducta, dat numerum qvinti ordinis: & in hunc ducta ſexti: atq; ſic in infinitum progredi-

diendo. Quot igitur radices, hoc eſt qvot ſunt numeri ſimplices,tot qvadrati,tot cubi,& tot qvarti,imo qvinti, ſextiqve ordinis numeri, atqve ſic in infinitum. At vero hoc falſum eſt. Quadrati enim longe pauciores ſunt quã numeri ſimplices, ut jam demonſtratum fuit: cubi vero his pauciores; qvarti verò qvinti & ſexti ordinis numeri longe adhuc pauciores. In decade enim unus tantum cubicus eſt numerus, nempe octonarius, præter unitatem qvi ſui ipſius cubus eſt: qvarti, qvinti, ſextive ordinis nullus eſt, niſi pro his omnibus unitatem ponas. Si enim unitatem centies in ſe multiplicaveris,hoc eſt unitatem centum vicibus multiplicaveris per unitatem, ſemper prodit unitas. In Hecatontade autem cubici numeri ſunt tres,nempe 8. 27. & 64. qvibus ſi unitatem addas erunt qvatuor. Quarti ordinis tres omnino ſunt 1. 16. 81. Quinti & ſexti ordinis præter unitatem unicus tantum in unoqvoqvis eſt, 32. in V. & 64. in VI. In Chiliade cubici qvidem numeri cum unitate decem, qvarti vero ordinis qvinqve 1. 16. 81. 256. 625. qvinti ordinis tres. 1. 32. 243. ſexti ordinis totidem. 1. 64. 729. Porro in Myriade cubici qvidem numeri erunt 21. qvarti vero ordinis 10. qvinti ſex. & ſexti ordinis qvatuor, una cum unitate, qvæ in cæteris etiam numeratur. Adeoqve qvo major numerus fuerit, eo pauciores, reſpectu numerorum ſimplicium,ſunt qvadrati,& adhuc pauciores cubi,& multo adhuc pauciores qvarti, qvinti, ſextiqve ordinis numeri. Et qvo longius ab unitate recedas, tanto plures erunt

numeri irrationales, qvam qvadrati: & qvadrati,qvam cubi: & deniqve cubi,qvam qvarti ordinis numeri: & ſic in infinitum. Et tamen verum eſt, omnem numerum poſſe in ſe multiplicari, & iterum in productum, & iterum in productum, & iterum in productum. atqve ſic in infinitum. Adeoqve etiam certum eſt nullum plane numerum dari, qvin ſit radix alicujus qvadrati: tum qvoqve radix alicujus cubi: & porro radix alicujus numeri qvarti, qvinti, ſextive ordinis. Certum præterea eſt omnem radicem quadratam ſuum habere numerum qvadratum: ideo enim radix vocatur qvod in ſe ductus numerus qvadratum generet. Omnem qvoqve radicem cubicam ſuum habere cubum: & radicem qvarti ordinis ſuum habere biquadratum: & qvinti ordinis ac ſexti eodem modo, atqve ſic in infinitum. Si ergo omnis radix qvadrata ſuum habet qvadratum ergo qvot radices, tot qvadrati: & qvot radices cubicæ, tot numeri cubici, & ſic in infinitum. Sunt autem omnes omnino numeri radices qvadratæ, & cubicæ, & qvarti, qvinti, ſextiq; ordinis numerorum &c. Nullus enim numerus eſt, qvi hos omnes ex ſe generare non poſſit. Quot ergo numeri, tot radices, tot qvadrati, tot cubi, tot biqvadrati, tot bicubi. Nempe, ſi ullo certo numero definire velim, fallor; neqve ullo modo dicere poſſũ, qvot vel numeri ſint, vel radices, vel qvadrati, vel cubi &c. ſed recte & vere dico eſſe numero infinitos. Adeoqve infinitum numerum eſſe, in qvo, tot ſunt qvadrati, qvot numeri: tot cubi, qvot numeri: tot qvin-

qvinti, ſexti ordinis numeri, qvot numeri ſimplices. Quo qvidem modo, inter omnes intellectu noſtro comprehenſibiles numeros, ſola unitas erit numerus infinitus, eritq; & radix, & qvadratum, & cubus, & biqvadratum, & bicubus, & qvocunq; demum progredi voluerimus. Naturam enim habebit omnibus his convenientem. Quadrati enim numeri hanc habent proprietatem, ut ſemper inter ſe unum habeant medium proportionalem : Cubici vero duo: quarti autem ordinis tres: qvinti ordinis qvatuor: ſexti ordinis qvinq; & ſic in infinitum. Sic inter 9 & 16. duos numeros qvadratos, datur medius proportionalis 12. Inter 4 & 81. duos etiam qvadratos, medius proportionalis datur 18. Porro inter duos numeros cubicos 27. & 64. duo medii proportionales dantur. 36. 48, Sic inter qvarti ordinis numeros 81. & 256. tres dantur medii proportionales 108. 144. 192. & ſic in cæteris. At vero inter unitatem & qvadratum qvemcunq; numerum, etiam datur media proportionalis: ut inter 1. & 81. qvadratum 9. datur medius proportionalis 9. inter. 1. & 64. cubum dantur duo medii proportionales. 4. 16. inter 1. & 81. qvarti ordinis numerum dantur tres medii proportionales. 3. 9. 27. & ſic in aliis omnibus. Qvocirca, unitas naturam omnium cujuscunqve ordinis numerorum habebit : & qvod neqvicqvam in infinitum progrediendo qværimus, id in ſola unitate inter omnes noſtro intellectu comprehenſibiles numeros, invenimus.

Qud

Quid divina ſcrutamur myſteria, & æterna ac infinita anguſtis intellectus noſtri limitibus circumſcribimus? Hæc ſane in clariſſimis ac cuivis maxime obviis principiis fundantur:& tamē qvando ut infinita & indiviſibilia conſiderantur, à noſtro intellectu percipi minime poſſunt. Quis hoc intelliget? tot radices eſſe qvot numeros: tot qvadratos, cubos, biqvadratos, bicubos, &c. qvot radices; adeoq; qvot numeros:& tamē in mille numeris ſimplicibus, qvadratos tantum eſſe 31. cubos decē: qvarti ordinis, qvinq;: qvinti ordinis, tres: decimi vero ordinis, tantum unum, ipſam nempe unitatem. Si tot ſunt cubi, & qvadrato qvadrati &c. qvot numeri: ergo in mille numeris, mille cubi erunt, mille biqvadrati: vel etiam mille erunt unum,& decę unum,& tria unum. Qvid abſurdius his dici poſſet? & tamen tales abſurditates committere cogimur, qvando infinita ad finitorum rationes examinamus. Qvid mirum igitur eſt? non poſſe intellectum noſtrum comprehendere qvomodo infinitus ille & incomprehenſibilis Deus & unus ſit & trinus: qvomodo idem in ſua æternitate omnia agat: milleqve anni ſint ipſi ac unus dies: & cum ubiqve ſit, nusqvam tamen comprehendatur? Quid mirum, ſi nulla ratione aſſeqvi poſſimus, qvomodo is qvi omnia continet, omnia ſuſtinet, idem in utero virginis ſuſtineatur: certis, in terra locis, circūſcribatur, in cruce ſuffigatur? Si enim iſta qvæ manifeſtis principiis nituntur, minime capi à nobis poſſint; eo qvod ſint in finita: qvanto minus ea comprehendemus

qvæ

qvæ non tantum ſunt infinita, æterna ac incomprehenſibilia, verum neq; ullo modo cognoſci aut inveſtigari qveunt, ex natura cognitis principiis: ſed divina tantum gratia revelantur. Fungos profectò aut inſanos ſophiſtas oportet eſſe eos, qvi cum videant in rebus pure naturalibus nihil ſe intellectu ſuo dignoſcere ubi ad infinita ventum eſt, in divinis rebus & qvæ omnem intellectus capacitatem longe excedunt, majora & certiora ſibi polliceri audent, auſuq; non dicam temerario ſed plane furioſo ac Diabolico, ea omnia in dubium vocare, imo falſi arguere conantur quæ infirmà & cæca ratione ſua perſpicere nequeunt. Anne ergo Sol aut lux non erit quod cæcus iſta videre nequeat? an omnes ſoni pro nihilo habebuntur, quod ſurdus hos non exaudiat? Sed vero ſi iſti hæc negarent, facile cæteri mortales eorum inſaniam dijudicarent, eo quod maxima hominum pars organa ab ipſa natura habeat ad hæc dignoſcenda: illorum vero ſtultitia, qui humanæ rationis modulo divina metiri volunt, eaque negare quæ intellectu non percipiunt, non quidem tam clare ab omnibus cernitur; cum omnium hominum ingenia his limitibus à natura ſint circumſcripta, ut infinita capere nequeant. Et homo tamen ambitioſiſſimum animal omnia ſe intelligere ac ratione comprehendere poſſe perſvadet, ſuæque ſapientiæ limites ultra terminos à natura poſitos proferre non dubitat. Sed vertant huc illi animum atque oculos, & ubi in minimis hiſce ac vulgaribus rebus didicerint quam cæci ſint &

omni plane ratione destituti; quando de infinitis, etiam quæ in natura considerantur, judicium erit ferendum: demum divina debita reverentia venerentur, fideque apprehendant quæ ratio non percipit, ut demum eo fruantur, qui cum omnia contineat, nullas tamen partes habet: sed totus in omnibus omnia implet.

CAP. VIII.

Et Sexti quidem argumenta præcipua contra puncti Geometrici definitionem huc usq; examinavimus: duo tamen adhuc restant paucis attingenda. Primum est quod punctum sit pars lineæ: alterum quod sit in loco. ex utroque colligit non esse indivisibile sed divisibile. De primo quidem ita ait Καὶ μὴν εἴπερ ὄψις τῶν ἀδήλων ἐστὶ τὰ φαινόμενα, ἐπεὶ οὐ δυνατὸν ἐν τοῖς φαινομένοις λαβεῖν τινος σημεῖον καὶ πέρας ἀδιάστατον, δῆλον ὡς οὐδὲ ἐν τοῖς νοητοῖς ληφθήσεταί τι τοιοῦτον. Ἐν δέ γε τοῖς αἰσθητοῖς οὐδέν ἐστιν ἀδιάστατον λαβεῖν, ὡς παραστήσω, ὥστ᾽ οὐδὲ ἐν τοῖς νοητοῖς. Πᾶν τοίνυν τὸ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ὑποπῖπτον τινὸς πέρας καὶ σημεῖον, σὺν τούτῳ καταλαμβάνεταί τινος ἄκρον σὺν τῷ καὶ μέρος ἐκείνου οὗπερ ἐστὶν ἄκρον, ὑποπίπτειν. Ἐὰν γοῦν ἀφέλωμεν αὐτό, μειωθήσεται τὸ ἀφ᾽ οὗ ἡ ἀφαίρεσις. Τὸ δὲ μέρος τινὸς ὑπάρχον, εὐθὺς καὶ συμπληρωτικὸς αὐτοῦ καθέστηκεν. Ὃ δὲ ἔστι τινος συμπληρωτικὸν πάντως αὔξει τὸ μῆκος ἐκείνου, καὶ ὅ ἐστι μεγέθους αὐξητικόν, τοῦτο ἐξ ἀνάγκης ἔχει μέγεθος. Πᾶν ἀρὰ τὸ ἐν αἰσθητοῖς σημεῖον τι-

νὸς

νὸς καὶ ἄκρον μέγεθος ἔχον, οὐκ ἔστιν ἀδιάστατον. ὅθεν εἰ καὶ τὸ νοητὸν μεταβατικῶς ἀπὸ τοῦ αἰσθητοῦ νοοῦμεν, σὺν τούτῳ καθεστὼς σημεῖον καὶ πέρας γραμμῆς, αὐτὸ νοησομεν σὺν τῷ καὶ πληρωτικὸν αὐτῆς ὑπάρχειν, ὥς τε καὶ αὐτὸ διάστασιν ἕξει πάντως, ὅγε διαστάσεως ἐστι περιποιητικόν. *Præterea cum ea quæ manifeſta ſunt, cernuntur per ea, quæ apparent, quoniam in iis quæ apparent, ſumi non poteſt alicujus ſignum & finis quod ſpatio careat ac dimenſione: perſpicuum eſt quod nec in iis quidem quæ cadunt ſub intelligentiam ſumetur quidem ejusmodi. In ſenſibilibus autem nihil poteſt ſumi quod non intervallum habeat ac dimenſionem, ut oſtendam: quamobrem neq; in iis quæ cadunt ſub intelligentiam. Cui ergo in ſenſibilibus accidit terminum alicujus eſſe & punctum, illi etiam accidit, & extremum alicujus eſſe, & partem illius cujus eſt extremum. Quod vero pars alicujus eſt, etiam ipſum complet: quod antem aliquid complet, omnino auget ipſius longitudinem. & quod magnitudinem auget id omnino eſt magnitudo. Omne ergo quod in ſenſibilibus eſt punctum, & alicujus extremum, dimenſione non caret. quippe magnitudinem habens. Unde etiam ſi id quod cadit ſub intelligentiam tranſeundo ex ſenſili iutelligimus, cum eo intelligimus, etiam ipſum punctum, & lineæ eſſe extremum, & ſimul eam implere: ideoq; dimenſionem habere, ſi quidem eandem acquirit & efficit.* Sed ſtultiſſimum eſt velle de iis rebus quæ ſub ſenſum non cadunt ex ſenſuum judicio argumentari. Si enim ſenſu-

um judicio ſtandum foret, utique Sol vix bipedalis eſſet; imo unius tantum pedis magnitudiuem æquaret. Tum quoque infinitos errores committeremus in rebus etiam manifeſtis, ſi quæ ſenſibus apparent ſine omni rationis cxamine, pro veris recipi deberent. A ſenſibilibus ergo ad intelligibilia argumentari, eſt plane inſulſum. Ponit præterea dari aliquod punctum ſenſibile: quod falſum omnino eſt. Quicquid enim ſenſibus apprehenditur quamvis minutiſſimum, tamen nec linea eſt, nec punctum: ſed ſuperficies. Verum ut Geometricè procedamus, clara demonſtratione manifeſtum faciemus, extremũ & terminũ ſuperficierum imo ſolidi alicujus ſeu corporis, partem illius minime eſſe cujus eſt extremum: quod Sexto plane contrarium eſt. Sumatur in figura n. V. ABC recta linea ſecta bifariam in B. & centro B intervallo AB deſcribatur ſemicirculus ADC,& eodẽ centroB,interuallo autẽ EB, minori quam AB,deſcribatur circulus EXF.Extruatur ſuper AB quadratũ AD.& ſuper BC quadratũ BI.eodẽ modo ſuper EB&BFconſtruantur quadrataBG & BH. eductisque diagonalibus BG.BK.BH.BI.jacebuntBK. BG & BH. BI, ſibi invicem in directum. moveatur nunc totũ planũ ACKI in gyrum ſuper axem BD. deſcribet ergo AK. vel CI. cylindrũ cujus altitudo AK, diameter ABC vel KDI: EG autem vel FH alium deſcribet cylindrum,cujus altitudo EG, diameter EF vel GH. Triangulum vero KBI. circumactum eodem motu ſuper axem BD. conum deſcribet cujus axis BD, baſis circulus deſcriptus ſuper diametrum KI. Triangu-

gu-

gulum quoque BGH conum ſimiliter deſcribet cujus axis BX baſis circulus deſcriptus diametro GH. Denique in hac circumrotatione ADC ſemicirculus dimidiam ſphæram deſcribet cujus diameter erit AC: & EXF ſemicirculus etiam dimidiam ſphæram deſcribet, cujus diameter EF. Demantur utrinque portiones ſphæricæ, cono KBI plane intacto. hoc eſt, in minori hemiſphærio dematur totum ſegmentum ſphæricum quod conum BLR ambit, planoque EBL deſignatur. In majori autem hemiſphærio, auferatur ſegmentum ſphæricum quod cylindrum EG, & extremas partes coni BZ ambit, & plano AEGZ indicatur. Remanet ergo in majori cylindro, portio cylindrica qvæ repræſentatur plano AKD. In minori autem cylindro remanet portio cylindrica repræſentata plano EXG. Totus autem conus KBI manet integer, ſicut & conus BGHI. Secentur nunc portiones hæ cylindricæ & conus ipſe, plano quodam parallelo baſi majoris cylindri ſeu AB. verbi g. plano MN. erit ergo portio cylindrica quæ repræſentatur plano AMP, æqualis cono BLR. per ea quæ demonſtrata ſunt ab inſigni Mathematico Luca Valerio libro ſecundo de centro gravitatis ſolidorum Propoſitione XII. Sed per eandem demonſtrationem portio cylindrica repræſentata plano EOL, æqualis erit cono BLR. Atq; hoc in omni ſectione parallela verum eſt. Ubicunque enim portiones hæ cylidricæ una cum cono ſecantur, modo planum ſecans, baſi cylindrorum & coni, parallelum fuerit: ſemper portio cylindrica æqualis erit

ſegmento conico ſeu cono illi qvi à majore abſcinditur. Idque in omnibus partibus verum eſt qvamdiu ulla pars ſumpta fuerit. Cum ergo portio cylindrica repræſentata plano ELO ſit æqualis cono LBR: & port o cylindrica repræſentata plano APM æqualis ſit eidem cono LBR: erunt iſtæ duæ portiones cylindricæ inter ſe æquales. Et ſi ſectio in infinitum continuetur plano ad baſin parallelo, ſemper portiones cylindricæ inter ſe erunt æquales, utpote eidem cono æquales.

Præterea, ſuperficies plana quæ duobus circulis, quorum diametri ſunt LR. & OS. terminatur, cujus latitudo repræſentatur recta OL, & eſt baſis portionis cylindricæ EOL. æquatur plano circulari cujus diameter eſt LR baſis coni LBR. Cum enim BTL angulus ſit rectus, quadrata exſtructa ſuper LT & TB æquantur quadrato ſuper LB. hoc eſt ſuper EB vel OT. Æquatur autem latus LT lateri BT, angulus enim BTL rectus, TBL autem dimidius recti: unde TLB etiam erit dimidius recti. Quadtatum ergo ſuper LT. æquale erit quadrato ſuper TB. Unde quadratum ſuper OT æquale erit binis quadratis ſuper LT. Quatuor ergo quadrata ſuper OT hoc eſt quadratum ex OS. æqualia erunt octo quadratis ex LT. hoc eſt duobus quadratis ex LR. Sunt vero circuli inter ſe ut quadrata diametrorum. per. 11. XII. Element. Cum ergo quadratum ſuper OS. duplum ſit quadrati ſuper LR utpote æquale binis talibus quadratis, ergo & planum circulare cujus diameter OS. duplum erit plani circularis cujus diameter LR. ablatoque communi plano

cir-

circulari descripto super LR diametro, remanet planum circulare repræsentatum recta OL, quod binis circulis descriptis ab LR & OS terminatur, æquale plano circulari super LR descripto. Est autem circulus super LR basis coni. Planum vero circulare repræsentatum recta linea OL basis portionis cylindricæ EOL. Basis ergo portionis cylidricæ æquatur basi coni. Atque hoc in omni sectione parallela ad basin verum est. Eodem fere modo demonstratur basin portionis cylindricæ APM. æquari basi coni LBR. Iunctâ enim PB rectâ, erit quadratum descriptum super PB æquale quadratis super PT. TB. hoc est quadratis super PT & TL. quandoquidem BT. & TL inter se sunt æquales, ut antea dictum. Est vero PB æqualis AB utpote ejusdem circuli radius. AB autem æqualis MT opposito lateri ejusdem parallelogrammi MB. Unde PB & MT æquales erunt, & quadratum super MT, æquale binis quadratis, uni super PT, alteri super LT. Unde quatuor quadrata super MT, hoc est quadratum ex MN, æqualia erunt quatuor quadratis ex PT, hoc est quadrato ex PQ. & quatuor præterea quadratis ex LT, hoc est quadrato ex LR. Habent autem circuli eam inter se rationem quam quadrata diametrorum. Planum ergo circulare super NM diametrum æquale erit plano circulari super PQ diametrũ, & præterea plano circulari super LR diametrum. Hoc est, planum circulare MN, excedit planum circulare LR, plano circulari PQ. Auferatur planum circulare PQ à plano circulari MN. remanet planum circulare ter-

terminatum binis circulis deſcriptis ex MN & PQ diametris, quod repræſentatur MP. recta, eſtque illud æquale circulari plano LR. Atque hoc in omni ſectione parallela ad baſes coni & cylindri verum eſt. Eſt vero planum circulare ſuper MP, baſis portionis cylindricæ AMP. Circulus autẽ ſuper LR baſis coni LBR. Baſis ergo portionis cylindricæ in omni ſectione parallela ad baſes coni & cylindri, æquatur baſi coni. Antea vero demonſtratum fuit baſin circularem OL portionis cylindricæ GEL æquari eidem baſi coni nempe circulo, ſuper LR. ergo æquatur etiam baſi circulari MP portionis cylidricæ MAP. Idque in omni ſectione ad baſes parallela verum eſt. Si ergo portiones hæ cylindricæ in infinitum plano ad baſes parallelo ſecentur; & conus quoque eodem modo ſecetur: erit quævis portio cylindrica cono æqualis, & ipſæ portiones cylindricæ inter ſe æquales, denique cujusvis portionis cylindricæ baſis reſpondentis ſibi coni baſi æqualis, & baſes portionum cylindricarum inter ſe æquales. Adeoque ſi totus cylindrus ACIK plano μ.ν ſecetur, erit portio cylindrica repræſentata plano μ A α æqualis portioni cylindricæ γEβ. & ſingulæ harum æquales cono δBε. baſesque ſingularum inter ſe æquales, nempe planũ circulare repræſentatum linea μα æqvale plano circulari γβ, ſingulaque plana æqualia circulo δε. Ita ζη A & θιE ſunt inter ſe æquales, baſesque æquales habent, ſingulæque harum æquales cono κBλ, baſesque ſingularum æquales baſi coni ſeu circulo ſuper κλ. Quamdiu ergo illæ partes aut cylindricarum portio-

tionum, aut coni remanſerint, tamdiu etiam inter ſe æquales erunt, modo ut antea dixi. Decreſcendo autem cylindricæ hæ portiones terminantur in circulo, & majoris quidem cylindri portio, in circulo deſcripto ſuper AC. minoris vero cylindri portio, in circulo deſcripto circa EF. Conus autem terminatur in puncto B. Si ergo extrema hæc ſeu termini horū corporum ac ſuperficierum, partes revera eſſent, quod ſupponit Sextus; utique circulus AC æqualis eſſet puncto B: etiam circulus EF æqualis eſſet puncto B: & ipſimet circuli AC & EF inter ſe eſſent æquales: quod eſt abſurdum. Quomodo enim ſemicirculus ADC æqualis eſſet puncto B? aut ſi indiviſibilium ratio haberi nequeat, quomodo ſemicirculus ADC æqualis eſſet ſemicirculo EXF? At ſi integri circuli, ex AC & EF deſcripti, æquales eſſent: etiam ſemicirculi invicem æquales forent. Extremum ergo corporis alicujus, ſive linea ſit, ſive punctum; pars non eſt. quod erat demonſtrandum.

Alterum Sexti argumentum eſt, quod punctus ſit in loco. Ἀλλ᾽ εἰώθασι inquit πρὸς τὰς τοιαύτας ἐπιχειρήσεις ὑπαντῶντες οἱ περὶ τὸν Ἐρατοσθένη λέγειν, ὅτι τὸ σημεῖον οὔτε ἐπιλαμβάνει τινὰ τόπον, οὔτε καταμετρεῖ τὸ διάστημα τῆς γραμμῆς, ῥυὲν δὲ ποιεῖ τὴν γραμμήν, ὅπερ ἐστὶ ἀδιανόητον. ῥεῖν γὰρ νοεῖται τὸ ἀπό τινος τόπου εἰς τινα τόπον ἐκλείνεσθαι ὥσπερ τὸ ὕδωρ. *Sed ejusmodi argumentis occurrere ſolent Eratoſthenei & dicere, quod punctum neque ullum occupat lo-*

cum; neq; metitur ſpatium lineæ; ſed fluens facit lineam: quod quidem eſt ejusmodi, ut ne cogitari quidem poſſit. Fluere enim dicitur ab aliquo loco in aliquem locum extendi, ſicut aqua. Sed male rurſum argumentum à ſenſibilibus ad inſenſibilia, à corpore ad non corpus ducit. Nam quod corpus, cum fluit, locum mutat, inde non ſequitur, ea quæ non ſunt corpora, locum mutare fluendo. Imo quomodo locum ea mutare poſſunt quæ nullum habent? Eſt enim locus ſpatium vacuum corpore plenum. At ſi locus ſpatium eſt aliqua re plenum, punctum quidem in loco Phyſice loquendo non eſt. Nam cum nullas habeat dimenſiones, neque ſpatium implere poteſt. Quod ſi definitionem Ariſtotelis ſequamur, qua is definit locum circumſcriptionem continentis certe neque punctum in loco erit. Omnis: enim circumſcriptio fit vel lineis, vel ſuperficiebus. At id puncto non convenit: ergo nec ullo modo eſt in loco. Verum quidem eſt, punctum quando fluit, non ibidem manere ubi erat, ſed late loquendo, locum mutare. ut in fig. n. 4 punctum F quando movetur ab F in K, mutat ſane locum ſeu τὸ πȣ̃, aut ſuum ubi. Et ita quidem punctum eſt in aliquo loco ſeu ubi. Verum id non probat punctum eſſe corpus. Locus enim qui ſolis corporibus convenit eſt ſpatium ut antea dixi: id vero in quo punctum eſt, nullo modo ſpatium dici poteſt. Punctum quidem tranſeundo ſeu fluendo ſpatium aliquod in longum facit. Sed in ſpatio trinè dimenſo, ut loqvuntur Phyſici, non continetur, nec corpus eſt.

CAP.

CAP. IX.

Et hactenus Sexti dogmata examinavimus quæ contra Definitionem puncti protulerat: nunc ad ea, quæ de linea & ſuperficie dicit pergamus. Ac primum quidem negat, lineam eſſe puncti fluxum: quod neq; nos dicimus. Aliud enim eſt dicere linea eſt puncti fluxus: & aliud, linea fit ex fluxu puncti. Linea ergo neque punctum eſt quod fluit; neque fluxus puncti: ſed id quod fluxu puncti deſcribitur. Hoc ergo argumentum nihil contra Geometriæ principia concludit: ſicut neque illud quod ſubjungit, non eſſe lineam multa ſigna locata per ordinem. id enim antea demonſtravimus lineam non componi ex punctis, neque in puncta dividi poſſe. Fit enim linea, ex fluxu vel unius puncti, vel plurium. ſicut illa quæ in plano ex circum gyrato circulo deſcribitur, ex plurium punctorum fluxu naſcitur. Aliud enim eſt quod efficit lineam, aliud ex quo efficit. punctum enim efficit lineā, non ut materia lineæ, ſed ut inſtrumentum potius vel efficiens. Cum ergo hæc omnia contra Geometriæ principia lineæque definitionem nihil concludant: his miſſis ad ea pergamus quibus abſolute evincere conatur lineam non eſſe longitudinem ſine latitudine. Ait vero Σκεψάμενοι δὲ ἡμεῖς ἀκριβῶς οὔτε ἐν τοῖς νοητοῖς, οὔτε ἐν τοῖς αἰσθητοῖς εὑρήσομεν δυνάμενόν τι ληφθῆναι μῆκος ἀπλατές. καὶ ἐν μὲν τοῖς αἰσθητοῖς ἐπείπερ ὃ ἂν λάβωμεν αἰσθητὸν μῆκος, τοῦτο πάντη τε καὶ πάντως σὺν ποσῷ πλάτει ληψόμεθα. Ἐν δὲ

τοῖς νοητοῖς, καθ' ὅσον ἕτερον μὲν ἑτέρου στενότερον δυνάμεθα νοῆσαι μῆκος, ὅταν δὲ τὸ αὐτὸ μῆκος καθ' ἰσότητα φυλάττοντες, σχίσωμεν ταῖς ἐννοίαις τὸ πλάτος, καὶ ἄχρι τινὸς τὸ αὐτὸ ποιῶμεν, ἔλαττον μὲν τὸ πλάτος καὶ ἔλαττον γινόμενον νοήσομεν, ἐπειδὰν δὲ ἅπαξ φθάσωμεν στερῆσαι τοῦ πλάτους τὸ μῆκος, οὐκέτι οὐδὲ μῆκος φαντασιούμεθα, ἀλλ' ἀναιρεῖται καὶ ἡ τοῦ μήκους ἐπίνοια. *Si nos autem diligenter atque accurate consideraverimus, neque in iis quæ cadunt sub intelligentiam, neque in sensibilibus inveniemus ullam sumi posse latitudinis expertem longitudinem. Et in sensibilibus quidem, quandoquidem quamcunque sumpserimus sensilem longitudinem, eam omni ratione & omnino sumemus cum quanta latitudine. In iis autem quæ cadunt sub intelligentiam, quod aliam quidem alia angustiorem possimus mente concipere longitudinem. Quando autem ex æquo eandem servantes longitudinem, cogitatione scindimus latitudinem; aliquatenus quoque idem facimus, ac latitudinem minorem ac minorem concipimus. Postquam autē semel eo pervenerimus, ut latitudine privemus longitudinē, tū neq; longitudinē ulterius cōprehendimus, sed ipsius etiā longitudinis cogitatio simul tollitur.* Sed quoniā Sextus longitudinē sine latitudine concipere nequit; agedū ex claris demonstrationibus eam deducamus, atq; intellectui comprehendendam proponamus. Nam sensibus hæc velle percipere, id vero insanum foret: cum non fallaci sensuum judicio ac censuræ: sed acutissimi ingenii perspicacitati hæc sint committenda.

Sit

Sit ergo planum ABCD in fig. 6. ſuper hoc autem perpendiculariter erectũ ſit parallegrammũ rectangulũ AGEF. Aliud autẽ parallelogrammũ huic & quoad ſingula latera, & quoad angulos æquale, in hoc eodem plano ABCD ſit erectum perpendiculariter: ita quidem ut una extremitas FE tangat extremitatem parallelogrammi AGFE. dico extremitates horum parallelogrammorum tangere ſe inuicem in linea recta. Cum enim FE latus parallelogrammi AGFE ſit perpendiculare plano ABCD: ergo ſi ab altera plani parte, ab eodem puncto E, educatur recta linea, eidem plano ABCD perpendicularis; jacebunt iſtæ duæ lineæ ſibi invicem in directum per XIIII. Primi Elem. Rurſus cum latus FE parallelogrammi BHFE ſit perpendiculare eidem plano ABCD. ergo recta à puncto E ab altera plani parte educta ad rectos angulos, in directũ jacebit ipſi EF. Latus ergo parallelogrammi AGEF, una cum latere parallelogrammi BHFE, eidem rectæ in directum jacebunt, adeoque unam eandemque rectam lineam facient. (Euclides libro XI. propoſit. III. demonſtravit, ſi duo plana ſe invicem ſecent, communem ipſorum ſectionem fore rectam lineam. Sed alia methodo uſus eſt, illudque ſuppoſuit, quod nos nunc demonſtrare volumus, rectam nempe lineam omnis latitudinis eſſe expertem). Duo ergo hæc plana tangunt ſe invicem in recta linea: ideoque & planum ſeu parallelogrammum AGFE tanget planum ABCD in recta linea AE; & planum ſeu parallelogrammum BHFE tanget planum ABCD in recta linea BE. Sunt

vero AE & BE baſes tangentium ſe invicem parallelogrammorum: ergo ipſæ rectæ lineæ AE & BE ſe invicem tangent, angulumque rectilineum efficient AEB.

Quod ſi ſpatium inter BAHG alio parallelogrammo claudatur perpendiculari ad planum ABCD, v. g. plano ABHG, tanget quoque parallelogrammum, ſingula horum planorum, in recta linea ad AB. AG. & BH. quarum AB una cum BE & AG duos angulos efficiet: & tres AB. BE. EA. triangulũ. Tum quoq; HGF triangulum erit æquale AEB. triangulo. Cũ enim BA & HG latera ſint oppoſita ejusdem parallelogrammi; & HF & EB, & GF & EB etiam latera oppoſita ejusdem parallelogrammi: ergo tria horum triangulorum latera invicem æqualia erunt, adeoque tota triangula æqualia. Dividatur parallelogrammum AB HG bifariam recta KL. à parallelogrammo autem AGFE auferatur portio æqualis ipſi ALKG parallegrammo: & ſit parallelogrammum ablatum ab AGFE parallelogrammo, AGXO. Ab altero quoque parallelogrammo HBEF auferatur quoque parallelogrammum LBHK. quod ſit HBPM. Sunt autem AGXO & AGKL parallelogramma in eadem altitudine: ergo & baſes erunt æquales; adeoque LA æqualis AO. tum quoque LB æqualis erit BP. Quando ergo à parallelogrammis AGFE & BHFE auferũtur parallelogramma æqualia parallelogrammis AK. LH etiã à rectis AE & BC auferuntur rectæ AO & BP æquales rectis AL & LB baſibus parallelogrammorum ablatorum. Dico au-

autem parallelogramma AGXO & BPHM inclinare quidem invicem, nec tamen concurrere. Si enim concurrerent, utique & bases eorum BP. AO. & summitates HM & GH se invicem tangerent. At vero tum lineæ istæ cum lineis GH & BA triangula duo similia & æqualia facerent, in quibus duo latera non majora essent reliquo. BP enim & AO latera æqualia sunt AL & LB lateribus, hoc est toti AB. Hoc vero est absurdum. Cum ergo nec AO tangat BP nec GX tangat HM. neque planum AOGX tanget planum BHMP. Jungatur termini ipsorũ PM.XO. plano parallelo ipsi HGAB.sitq; planũ illud parallelogrammũ MPOX.dividatur hoc quoq; parallelogrammum bifariam in duo parallelogramma, singulisque horum, æqualia duo alia parallelogramma auferantur à parallelogrammis XOFE & MPFE, sintque parallelogramma ablata XOQR & PMST. dico neque hæc parallelogramma posse se invicem tangere: nisi & lineæ OQ & PT se invicem tangant. At hoc est impossibile: latera enim OQ & PT tum triangulum cum OP facerent, in quo ambo latera simul sumpta æqualia essent tertio: quod est absurdum. Quod si ergo termini RS QT, parallelogrammo quodam jungantur, illudque dividatur bifariam, & æqualia semissi hujus parallelogramma utrinque auferantur: ne illa quidem se invicem tangent propter dictas causas. Superficiebus ergo AEGF & BHFE in infinitum partes demi possunt, ac parallelogrammum ABHG. in infinitum dividi. Si enim progrediendo ut cæptum est, eo quisquam veniret; (ut nõ

quo-

quoad sensum, sed quoad intellectum) nihil ultra ipsis parallelogrammis auferri posset: utique haberet eorum extrema. At in extremis se tangunt invicem. Si vero parallelogramma se contingunt; & lineæ AF. BF se contingent. Si vero se contingunt, faciunt utique, cum basi proxime antecedentis parallelogrammi, triangulum, in quo duo latera erunt æqualia uni, quod est absurdum. Atque hoc ex demonstratione antea allata de puncto liquet. Concludo igitur superficiem in infinitum dividi posse. Tum quoque duo parallelogramma nusquā in superficie aut divisibili in latitudine cōcurrere. Quādiu enim illic superficies aut divisibile est, tamdiu nō concurrunt. Concurrunt ergo in indivisibili, seu in eo, quod nullam latitudinē habet. Demōstratū vero antea fuit contactū horū parallelogrammorum fieri in linea. Ergo linea erit indivisibilis, neque ullam habebit latitudinem. quod erat demonstrandum. Patet ergo ex his non tantum longitudinem sine latitudine concipi posse, sed etiam in natura esse longitudinem sine latitudine, quamvis sensibus comprehendi nequeat: nempe lineam, quæ in duorum planorum contactu est, omni latitudine carere. Sicut autem antea demonstratum est, lineam secundum longitudinem in infinitum dividi posse; nec tamen unquam partes ejus fore puncta: Ita etiam nunc demonstramus superficiem omnem, & quoad longitudinem, & quoad latitudinem, in infinitum posse secari; neque tamen tali sectione unquam ad lineas perveniri. Adeoque, sicut in omni linea, infinita puncta acci-

cipi posse demonstratum est nec tamen ideo lineam ex punctis componi: ita hinc etiam concluditur in superficie infinitas lineas accipi posse; nec tamen superficiem ex lineis componi. quod ut rectius intelligatur, sequenti capite Geometrice demonstrabimus.

CAP. X.

Concipiatur in figura num. VII. planum aliquod quadrangulare ACX. rectangulum, in quo situs sit cylinder rectus ATSD cujus basis sit circulus DAB: dico primum, cylindrum contingere planum hoc in linea recta. Etenim si cylindrus plano quodam per axem ita secetur, ut idem planum, in extremitate cylindri, tangat planum in quo cylindrus est: erit planum secans cylindrum, ad aliud planum, perpendiculare. Sit enim planum ZFA secans cylindrum per axem: in extremitate autem seu termino sectionis, circa AT. contingat planum ACX: erit planum AFZ ad planum ACX perpendiculare. Cum enim planum hoc, secans cylindrum per axem, sit pallallelogrammum, per ea quæ à Sereno sunt demonstrata lib. I. de Sectione cylindri, propositione 11: basis vero parallelogrammi, nempe recta AZ, sit diameter circuli ABZD, quæ ideo ipsi AC rectæ est ad angulos rectos per XVIII. III. Elementorum: ac per eandem, etiam basis altera parallelogrammi, quæ est diameter circuli baseos cylindri, sit perpendicularis eidem plano: totum ergo parallelogrammum, quod cylindrum per axem secat,

erit perpendiculare plano ACX. per propositionem XVIII. lib. XI. Elementor. Tangit autem planum hocce planum ACX in linea, per propos. III. XI. lib. Elem. vel per ea, quæ præcedenti capite à nobis fuere demonstrata: ergo, & cylindrus tanget planum in linea. Si enim non tangit in linea, utique tanget in superficie. Habet vero superficies latitudinem, adeoque terminos latitudinis. Si ergo in superficie tangit: utique per axem cylindri duo plana educi possunt, contingentia planum in quo cylindrus est, in linea. Id autem est impossibile. Demonstratum enim est, omne planum, quod per axem cylindri ita ducitur, ut in extremitate cylindri planum tangat, in quo cylindrus est, necessario ad illud planum esse perpendiculare. Si ergo aliud planum v. g. *a.b.* per axem cylindri educatur, tangens ACX. in *b.* in extremitate cylindri: ergo angulus FBA erit rectus, adeoque in triangulo AFB erunt duo anguli recti: quod est absurdum. Tangit ergo cylindrus planum in recta linea: & quod, per axem ipsius, planum ducitur, ad contactum plani, in quo est, rectos angulos cum plano eodem facit. Idque in omni cylindro tam magno quam parvo absolute verum est.

Manifestum autem est, si cylindrus super planum aliquod libere circumvolvatur, æquale planum describere parti circumgyratæ suæ superficiei. Circumvolvatur ergo tali modo cylindrus ADTS, planũq; describat AL. æquale quartæ parti superficiei ipsius cylindri. Sit porro alius cylinder minor, cujus basis circulus

EGP

EGP, moveaturque in plano æqualiter, usquedum quarta pars ſuperficiei, ſuo circumactu, deſcripſerit planum EI. Planum ergo EI, minus erit plano AL: cum hoc, deſcribatur à quadrante ſuperficiei majoris cylindri: illud vero, à quadrante ſuperficiei minoris cylindri. Sit nunc minor cylinder ita majori inſertus, ut ambo communem axem habeant, motoque majori cylindro, minor etiam circumrotetur. Quando ergo, quadrante ſuperficiei majoris cylindri peracto, major cylinder tetigerit planum ACX in rectalinea LY, minor cylinder, circumgyrata quarta parte ſuę ſuperficiei, tanget planum EH in recta R*d*: adeoque duo hi cylindri æqualia plana deſcribent, cujus baſes erunt æquales, rectæ nempe AL & ER. Plana enim quæ per axem cylindrorũ tranſeunt, tangunt plana in quibus cylindri moventur, ad angulos rectos: ut demonſtratum fuit. Tanget ergo planum FG planum ER ad angulos rectos. & planum FB tanget planum AL etiam ad angulos rectos. Jacent vero duo plana FG & FB ſibi invicem in directum: adeoque FG planum eſt pars plani FB. Si enim ducatur planum quoddam *e.f.* tangens cylindtum PGE in recta repræſentata puncto G: planum hoc erit parallelum plano per axem ZFA. Contactus enim cylindri & plani fit ad angulos rectos, ut antea probatum: adeoque angulus *e*GF æqualis angulo PFG, rectus, recto. Sed eodem modo ſi ad contactum majoris cylindri in linea ex B, tangens planum ex *g.h.* conſtituatur, erit planum ex *g.h.* paral-

lelū plano per axem cylindri, & angulus gBF, æqualis PFB angulo, rectus, recto. atque per eandem rationem eGB æqualis gBG angulo. anguli ergo eGB & FGe æquales duobus rectis, ideoque FG & GB bases planorum, in directum sibi jacebunt per XIIII. I. Elem. adeoque ipsa plana in directum jacebunt. Quando ergo planum FB ad planum AC fuerit perpendiculare; etiam FG eidem plano erit perpendiculare. Et cum AL & ER sint plana parallela, quando ergo planū FG, perpēdiculare fuerit ALplano, etiā perpendiculare erit ER plano, per porisma XIII. propositionis inversæ libri XI. Elementor. At si FG planū perpendiculare est ER plano, etiam FB erit perpendiculare eidem plano ER: adeoque ER parallelogrammum æquale AL parallelogrammo. Pars ergo quarta cylindri minoris, describet planum ER, æquale plano AL. Sed antea per se motus cylinder describebat planum EI. minus plano AL. Ergo eadē cylindri superficies æqualiter circūgyrata, modo majus describit planū, modo minus: adeoq; minimus cylindrus, & perexiguum describit planum, & maximū ac avastissimū, pro diversitate cylindri majoris in quo movetur. Describendo autem plana hæc cylinder, semper planum tangit in linea. Et cum in utraque circumgyratione æqualiter circumgyretur, semperque planis suis alias, atq; alias lineas tangat, in plano subjecto; ergo in ambobus planis æquales numero erunt lineæ, hoc est tot in plano EI, quot in plano ER. At si superficies ex lineis componeretur, id es-

eſſet impoſſibile. Quo plures enim lineæ, tanto major ſuperficies: & quo pauciores lineæ, tanto ſuperficies minor eſſet. Non ergo ſuperficies componitur ex lineis.

Atque hinc ſequitur, ſi mille lineæ, imo quotcunque demum, conciperentur inter ſe invicem junctæ in latum, nullam tamen ſuperficiem facere, nullamque latitudinem habere; ſed unam tum ſimpliciter lineam conſtituere. quod paradoxon etiam Geometrice erit demonſtrandum, ut Sexti argumenta in contrarium eo facilius falſi convincantur. Ex iis quidem, quæ huc usque ſunt demonſtrata, idipſum facile liquet. Nam ſi linea nullam plane habet latitudinem, ergo quamvis centum mille congregentur lineæ, nullam tamen latitudinem facient: cum non poſſint id dare quod non habent. Sed quoniam hoc tam accurate intelligi nequeat; ſicut neque illud, quomodo quotcunque lineæ jungi poſſunt, & omnes tamen unam lineam conſtituere: id ſchemate 8. explicabimus.

Sit ſolidum triangulare ABC RST binis parallelogrammis rectangulis, invicem æqualibus, & uno minori; binisq; æqualibus triangulis rectangulis comprehenſum, quale figura VIII. exhibet. Duo ergo parallogramma nempe BCRS & ABTR concurrunt circa RB. Separata vero hæc bina parallelogramma ante contactum, ſingula ſuos proprios terminos habent: adeoque terminus parallelogrammi BCRS, nempe linea RB ante contactum, differt à termino paral-

lelogrammi ABRT. adeoque duo iſti termini duas lineas diſtinctas faciunt. Quando vero duo hæc parallelogramma jungi invicem cæperint, tunc duæ hæ lineæ etiam quoad latum invicem junguntur. Dico autem nullam latitudinem facere, ſed duas lineas junctas unam tantum conſtituere. Ex iis enim, quæ antea ſunt demonſtrata, conſtat, duo hæc plana ſe in linea contingere, ſine omni latitudine. Contingunt ſe autem invicem ſuis extremis, quæ ſunt duæ lineæ. Ergo duæ lineæ fiunt una, neque conjunctæ in latum ſuperficiem dant, aut latitudinem ullam faciunt.

Sumatur nunc aliud ſolidum triangulare huic per omnia ſimile & æquale. Repræſentetur vero, in figura 8. prius ſolidum, triangulo ABC: hoc vero, triangulo BED. Jam duæ planæ ſuperficies hujus ſolidi repræſentatæ BE & BD rectis, tangunt ſe invicem in linea; hoc eſt, duæ extremitates harum ſuperficierum, ſeu duæ lineæ junctæ invicem, faciunt unam lineam: ut in priori demonſtratum fuit. Jungantur nunc invicem duo hæc ſolida ABC & BDE verſus B. ita ut AB planum ipſi BD plano in directum jaceat. duæ ergo ſuperficies AB & BD binis ſuis extremis tangunt ſe invicem in linea B: adeoque ex duabus lineis una fit. Sed etiam ſuperficies EB, tangit ſuperficiem AB, in linea B: & ſuperficies GB, tangit ſuperficiem BD, in linea B. Quatuor ergo lineæ, termini quatuor planorum, nempe AB. CB. EB. & DB, junguntur invicem, in linea repræſentata puncto B: neque tamen ullam latitudinem

nem faciunt, sed omnes unam lineam constituunt. Tangunt enim quatuor hæ superficies se invicem idque in una linea: ut antea fuit demonstratum.

Sumantur nunc alia duo solida triangularia duplo majora quam illa quæ hucusq; consideravimus. Nempe retenta eadem longitudine & latitudine, binisque æqualibus parallelogrammis iisdem positis, crassities seu profunditas augeatur: ita ut pro triangulo ABC rectangulo, sumatur duplicatum isosceles; nempe in figura VIII. BCE: & pro parallelogrammo CAST, sumatur duplum hujus, nempe parallelogrammum CEXS. Cum ergo latus parallelogrammi BE, ex constructione, sit æquale lateri BC: totumque parallelogrammum, repræsentatum BE rectâ, toti parallelogrammo, repræsentato BC rectâ, æquale; ergo si solidum triangulare BEC, imponatur solido triangulari BAC, ita ut planū BE imponatur plano BC, tangent duo hæc solida, se invicem, adeoq; superficies planæ, in terminis suis CS & EX. & utrumque in BR convenient. Concipiatur solidū hoc alteri impositum esse in figura 8. & esse EFB. Alterum autem solidum huic per omnia simile & æquale sit CQB, impositum solido A*B*C. Tangent ergo duo plana solidi hujus, nēpe C*B* & Q*B*, se invicem, in linea *B*. & duo hæc plana tangent duo plana F*B* & E*B* in linea *B*. adeoque quatuor lineæ, termini quatuor horum planorum, componuntur in linea *B*; nec tamen latitudinem ullam faciunt: in una enim linea solida hæc se tangunt. Sed in eadem linea *B* tan-

ge-

gebant ſe antea quatuor alia plana, ut antea eſt demonſtratum. ergo octo lineæ compoſitæ quoad latum, unam lineam faciunt, ſine omni latitudine. Quod ſi rurſus bina ſolida, poſterioribus ſolidis ſimilia & æqualia, his imponantur : quadrabunt ſuperficies invicem; adeoque QP B & GFB tangent ſeinvicem in recta repræſentata in *B*. adeoque rurſus quatuor rectæ lineæ conjunguntur quoad latum cum prioribus octo : nec tamen ullam latitudinem faciunt, ſed omnia hæc ſolida AC*B*. CQ*B*. QP*B*. GF*B*. FE*B*. ED*B*. tangunt ab una parte ſe invicem in linea *B*. Si rurſum his alia ſimilia & æqualia ſolida juxta eundem modum imponantur, pro ſingulis ſolidis, duas lineas habebimus, quæ prioribus lineis junctæ, unam tantum dant lineam, nec cæteris craſſiorem, nec ullo modo quoad latitudinem auctam. Sic in dimidio priſmate cujus baſis AKD, axis *B*, ſolida triangularia PO*B*. ON*B*. NM*B*. ML*B*. & ab altera parte G*B*H. H*B*I. I*B*K. K*B*L. ſibi invicem imponuntur : pro ſingulis vero ſolidis duæ lineæ prioribus ad latera apponuntur, adeoque in hoc dimidio priſmate, viginti octo lineæ junctæ invicem unam dant lineam, neque ullam latitudinem habentem, neque ullo modo auctam. Quod ſi priſma ſumatur quingentorum laterum, ſeceturque ad ſingulos angulos plano per axem ; habebit etiam in ſe quingenta corpora triangularia, qualia deſcripſimus: & ſi ſingula corpora hæcce ſigillatim conſiderentur, erunt illic mille parallelogramma invicem æqualia : quæ omnia

ſe

ſe tangent invicem verſus unam partem in linea. Tangunt vero ſe invicem ſuis extremis. ergo mille termini mille parallelogrammorum, hoc eſt, mille lineæ junguntur invicem ad latus, & unicum tantum lineam faciunt. Quod ſi priſma mille laterum æqualium ſumatur, ſectũq; fuerit ad ſingulos angulos, per axem; erunt illic bis mille lineæ, in vicẽ, in axe conjunctæ, quæ tamẽ omnes unã lineam dabunt, nec latitudine auctam, nec craſſitie: ſed omni latitudine & craſſitie carentem. Atque hoc ipſum in quibuscunque, quotcunque laterum, priſmatibus videtur, niſi in ſolis triangularibus, hoc eſt, quæ baſes habent triangulares. Etenim ſi per ſingulos angulos, planis per axem ſecentur, dabunt tot priſmata triangularia, quot latera, quorum quodvis binis extremitatibus tangit aliud, omniaq; priſmata tangunt ſe invicem in recta linea.

Quod autem in lineis hoc modo verum eſt: etiam in punctis verum oſtenditur. Demonſtratum enim antea fuit, duas lineas tangere ſe invicem in puncto. At ſingulæ harum linearum ſua habent extrema, ſuosque terminos, quibus ſe invicem contingunt. Si ergo in figura 8. baſis priſmatis multanguli, ſolummodo conſideretur, quatenus in plura triangula dividitur, quæ omnia in puncto B conjunguntur; patet mille, & centum mille puncta, invicem juncta, nec longitudinem, nec latitudinem, nec profunditatem ullam habere. adeoque omnibus omnino partibus carere, cum nullis dimenſionibus menſuretur.

CAP. XI.

Atque his probe conſideratis, haud difficile eſt falſitatem argumentorum Sexti intelligere, aliisque ob oculos ponere. Is quidem ex hypotheſi Mathematicorum, abſurdum quoddam colligere vult, quò falſi ipſas hypotheſes convincat. Ita enim ait. Μεταβάντες δὲ διδάσκωμεν ὅτι καὶ κατὰ τὰς ἐκείνων αὐτῶν ὑποθέσεις οὐχ οἷόν τε προβαίνειν τὴν ζήτησιν. Ἀρέσκει τοίνυν αὐτοῖς τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὡς καὶ ἀνώτερον ἐλέγομεν στρεφομένην πᾶσιν αὐτῆς τοῖς μέρεσι κύκλους γράφειν. ὥσπερ θεωρήματι ὄντι συνεκτικωτάτῳ μαχόμενόν ἐστι, τὸ τὴν γραμμὴν μῆκος ἀπλατὲς ὑπάρχειν. ζητῶμεν δὲ τὸν τρόπον τοῦτον. Εἰ γὰρ κατ᾽ αὐτοὺς πᾶν μέρος τῆς γραμμῆς ἔχει σημεῖον, τὸ δὲ σημεῖον στρεφόμενον κύκλον γράφει, δεήσει κατ᾽ αὐτοὺς ὅταν ἡ εὐθεῖα γραμμὴ στρεφομένη, καὶ πᾶσι τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κυκλογραφοῦσα, τὸ διάστημα καταμετρῇ, τῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς ἐξωτάτης περιφερείας ἐπιπέδου, τότε ἤτοι συνεχεῖς ἀλλήλοις ὑπάρχειν τοὺς καταγραφομένους κύκλους, ἢ διεστῶτας ἀπ᾽ ἀλλήλων. Ἀλλ᾽ εἰ μὲν διεστῶσιν ἀλλήλων, ἀκολουθήσει μέρος τι εἶναι τῆς ἐπιπέδου τὸ μὴ κυκλογραφούμενον, καὶ τῆς εὐθείας μέρος, τὸ κατὰ τοῦτο μὲν φερόμενον τοῦ διαστήματος, μὴ κυκλογραφοῦν δέ, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ἢ γὰρ οὐκ ἔχει κατὰ τοῦτο τὸ μέρος σημεῖον ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἢ ἔχουσα, οὐ καταγράφει κύκλον, ὧν ἑκάτερον παρὰ τὸν Γεωμετρικόν ἐστι λόγον. Καὶ γὰρ πᾶν μέρος τῆς γραμμῆς ση-

μεῖον

μεῖον ἔχειν φασί. καὶ πᾶν σημεῖον στρεφόμενον κυκλογραφεῖν. Εἰ δὲ συνεχεῖς ἀλλήλοις ὑπάρχειν οἷόν τε τοὺς κύκλους, ἤτοι οὕτως, συνεχεῖς ὡς τὸν αὐτὸν ἐπέχειν τόπον, ἢ ὥστε ἄλλον παρ' ἄλλον τετάχθαι, μηδενὸς σημείου μεταξὺ πίπτοντος. καὶ εἰ μὲν τὸν αὐτὸν ἐπέχουσι τόπον πάντες, εἷς γεννήσεται κύκλος, καὶ διὰ τοῦτο, τῷ ἐλαχίστῳ κύκλῳ καὶ πρὸς τῷ κέντρῳ καθεστῶτι, ὁ μείζων καὶ ἐξωτάτω καὶ πάντων περιληπτικὸς καθεστὼς κύκλος ἴσος γενήσεται, ὅπερ ἐστὶν ἀπεμφαῖνον. οὐ τοίνυν οὕτως εἰσὶ συνεχεῖς οἱ κύκλοι ὡς τὸν αὐτὸν τόπον ἐπέχειν· εἰ δὲ παράλληλοι τυγχάνουσιν ὥστε μεταξὺ μὴ πίπτειν ἀμερὲς σημεῖον, συμπληρώσουσι τὸ ἀπὸ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς περιφερείας πλάτος. ἦσαν δὲ γε γραμμαί. αἱ ἄρα γραμμαὶ ἔχουσι τὶ πλάτος καὶ οὐκ ἀπλατεῖς καθεστήκασιν· *Transeamus autem ac doceamus, quod nec ex illorum ipsorum hypothesibus fieri potest ut procedat quæstio. Placet iis, rectam lineam, si vertatur omnibus suis partibus circulos describere. ut superius etiam à nobis dictum fuit. Cui quidem constantissimæ eorũ speculationi repugnat, quod linea sit longitudo carens latitudine. Quæramus autem hoc modo. Nam si, ut est eorum senteutia, universa pars lineæ habet signum, signum autem dum vertitur describit circulum; oportebit ex eorum sententia, quando recta linea vertens, & omnibus suis partibus circulum describens, dimetitur intervallum à centro usque ad extremam planam superficiem, tunc aut inter se continuos habere circulos qui describuntur, aut inter se inter-*

tervallis disjunctos. Sed si sunt quidem inter se intervallis disjuncti, sequetur, esse partem aliquam superficiei, quæ non describitur in circulum, & partem rectæ quæ in hoc quidem fertur spatio, non describit autem circulum: quod quidem est absurdum. Aut enim non habet in hac parte signum recta linea; aut si habet, non describit circulum, quorum utrumque est præter ea quæ dicuntur à Geometris. Dicunt enim omnem partem lineæ habere punctum: & omne punctum, si vertatur, describere circulum. Sin autem existimant circulos inter se esse continuos: aut ita sunt continui, ut eundem locum teneant: aut ut alius juxta alium sit collocatus, ut nullum punctum interjiciatur. Omne enim punctum, quod cogitatione est interjectum, debet eundem circulum describere. Et si quidem eundem tenent omnes locum, fiet unus circulus; & propterea major, & qui est extra omnes, cæterosque comprehendit circulus, erit æqualis minimo circulo & qui est in centro: quod est absurdum. Non sunt ergo circuli sic continui ut eundem teneant locum. Si autem sunt paralleli ut inter eos non cadat aliquod punctum carens partibus: complebunt latitudinem à centro usq; ad superficiem. Quod si compleant; tenent aliquam latitudinem. sunt autem lineæ. Ergo lineæ habent aliquam latitudinem, neque ejus sunt expertes. Sed totum hoc Sexti sophisma in eo consistit, quod lineam ex punctis compositã arbitretur, atque partes lineæ esse puncta: quod falsum esse antea demonstravimus. Ut autem omnia rectius intelligantur,

tur, argumentum ipſum explicabimus Ajunt Geometræ rectam lineam, ſi æqualiter omnibus ſuis partibus promoveatur, tum ſuperficiem planam deſcribere: ſi vero una extremitate immobili manente, recta linea circumgyretur, circulum ab extremitate altera deſcribi; à tota autem linea, planum circulare. Cum vero in quacunque lineæ parte punctum ſumi poſſit, juxta Mathematicos; ergo quot puncta in linea hac circulum deſcribente, tot etiam erunt circuli. Hi autem circuli vel contigui ſunt, vel diſcreti. Et diſcreti quidem non erunt: ſtatim enim in ſpatio iſto quod inter duos circulos fuerit, aliud ſumetur punctum, quod etiam circulum deſcribet. Si vero omnes hi circuli tangunt ſe invicem; utique vel unum circulum faciunt, vel plures. Sed non unum. Tum enim minimus circulus qui centro proximus eſt, æqualis erit circulo exteriori & maximo. Plures ergo invicem diſtincti ſunt circuli, qui quidem totam circularis hujus ſuperficiei latitudinem undique explent. Ipſæ ergo circulares lineæ latitudinem dant, adeoque id habent quod aliis conferunt. Hæc ſumma eſt totius argumenti hujus Pyrrhonici, quod tamen facile red arguitur, ſi conſideremus, lineam quamcunque in infinitum dividi poſſe, nec tamen unquam ad puncta perveniri. Ubicunque ergo in linea punctum aliquod ſumitur, ſtatim linea iſta, in eo puncto, in duas partes ſecta eſt. In figura enim n. IX. recta linea AB. mota ea ratione ut punctum A quieſcat, B vero moveatur, de-

ſcribit quidem, extremitate ſua B, circulum BFG; tota vero linea, planum circulare comprehenſum circulo GFB. Neque hæc linea plures facit circulos quam unum, nempe BG. Aliud enim eſt planum circulare, aliud circulus in hoc plano deſcriptus. Sumatur nunc in recta AB punctum aliquod C. dividit ergo hoc punctum lineam AB in duas partes, ſeu in duas lineas, nempe AC & CB. Alia ergo eſt linea AC, alia vero linea *AB*. Si enim linea AC moveatur, puncto A immoto, deſcribet circulum CHI. recta vero AB deſcribet circulum BFG. neque duo iſti circuli ſe unquam tangent, neque iidem ullo modo ſunt. Inter eos autem linea eſt CB, quæ planum circulare GFB. IHC motu ſuo deſcribit. Quod ſi inter C & B aliud punctum ſumatur K, rurſus recta AB in duas lineas diviſa eſt, nempe AK & K*B*. deſcriptoque, ex AK, circulo, erit inter binos hoſce circulos ſpatium circulare comprehenſum circulis ex AC & A*B*, quod quidem recta K*B* deſcribitur. Eodem modo ſi in AC recta, ſumantur alia puncta, ut D aut F: erit recta AE, ſecta in duas partes, in AD nempe, & DC: tum quoque AD in duas lineas ſecta erit, nempe AE & ED. Quot igitur puncta in linea *AB* ſumuntur: tot etiam partes in eadem linea ſumentur, quæ tamen partes, omnes ſunt lineæ, non vero puncta. Linea enim in infinitum dividitur, non quidem in puncta, ſed ſemper in lineas. Ideoque inter ſingula puncta quæ ſumuntur, ſemper erit linea. Quodcunque enim punctum in hac linea ſumitur, vel
eſt

eſt idẽ cũ priori, vel eſt aliud. Si idẽ eſt cũ priori, eundẽ quoq; circulũ deſcribet, adeoq; nullã dabit latitudinẽ. Si non eſt idem cum priori, ergo in alia lineæ parte ſumitur, rectamque in duas alias rectas dividit. Si enim punctum D. ſumatur in puncto C. erunt AD & AC lineæ æquales. Si vero ſumatur alio in loco, vel verſus A, vel verſus *B*; erit linea AD vel major vel minor AC. Si enim D. ſumatur inter A & C, erit AD minor quam AC. ſin autem D ſumatur inter *B* & C. erit AD major quam *AC*. In priori caſu aliquid addendum erit ipſi AD ut æquetur ipſi *AC*. in poſteriori vero caſu, aliquid detrahendum. At illud quod vel additur, vel detrahitur, pars eſt lineæ; adeoque linea: ut antea fuit demonſtratum. Nullum ergo punctum in recta linea ſumi poteſt, ab alio puncto, in hac ipſa linea, diverſum, niſi aliam lineam det, priori vel majorem, vel minorem: adeoque inter duo quæcunque puncta, quæ in eàdem linea, diverſis in locis, ſumuntur neceſſario erunt lineæ. Et quamvis in his quoque lineis puncta ſumi poſſint, tamen eo ipſo hæ quoque lineæ in duas alias lineas dividuntur, idque in infinitum procedendo. Linea enim in infinitum dividi poteſt, & tamen partes ipſius ſemper ſunt lineæ, non vero puncta, ut antea eſt demonſtratum. Quot ergo puncta in recta linea ſumuntur; tot etiam inter eadem puncta lineæ rectæ concipiuntur. idque in infinitum. Quot autem puncta, tot circuli: quot autem lineæ, tot plana circularia, ſingulis binis circulis interjecta. Adeoque
non

non circuli dant latitudinem, ſed plana circulis interjecta, quæ ex motu rectarum linearum oriuntur. Si enim circuli latitudinem iſtam efficerent, utique tangerent ſe invicem. Alias inter circulos ſpatia eſſent vacua. At circulus circulum tangit tantum in uno puncto: ut demonſtratum Euclidi, propoſit. XII. lib. III. Elem. non quidem ex iis quæ nunc diſputamus: ſed principiis, quæ extra omnem dubitandi aleam ſunt poſita. Qui vero ita ſe intra contingunt circuli, non poſſunt habere idem centrum, ut ex iisdem certiſſimis principiis Euclidi demonſtratum eſt, propoſit. VI. lib. III. Elem. At vero circuli omnes in figura IX. habent ex hypotheſi ipſius quoque Sexti, idem centrum. ergo ſe invicẽ tangere nequeunt. At ſi ſe invicem non tangunt, neque ſuperficiem explere poſſunt, adeoque nec latitudinem facere. Non ergo latitudo circuli ex circulis ductis fit, ſed ex ſpatiis & ſuperficiebus circularibus, quæ, rectis, inter puncta quæcunq;, ſumptis, deſcribuntur. Ex multis autem parvis latitudinibus, magnam componi poſſe, dubium non eſt. Non habent ergo vel circulares, vel aliæ lineæ latitudinem. quod erat demonſtrandum.

CAP. XII.

Sed opponet forſan aliquis huic noſtræ reſponſioni illud Sexti argumentum, quod ſtatim, ante hæc verba, quæ, laudavimus attulit, quo probare conatur, duas lineas invicem in latum conjungi poſſe, ita ut omnibus ſuis partibus ſe invicem tangant, & diſtinctæ tamen

men maneant lineæ. Si enim duæ lineæ hoc modo jungi possunt, quidni & circuli hoc modo jungentur? Argumentum Sexti hoc est. Εἰ γὰρ ἡ γραμμὴ πέρας ἐστὶν ἐπιφανείας μῆκος ἀπλατὲς καθεστῶσα, δῆλον ὡς ὅταν ἐπιφάνεια ἐπιφανείᾳ παρατεθῇ, ἤτοι παράλληλοι γενήσονται δύο γραμμαὶ, ἢ μία ἀμφότεραι. Καὶ εἰ μὲν μία αἱ δύο γραμμαὶ γίνονται, ἐπεὶ ἡ γραμμὴ πέρας ἐστὶν ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐπιφάνεια πέρας σώματος, τῶν δὲ δυοῖν γραμμῶν μιᾶς ἅμα γινομένων, γενήσονται καὶ αἱ δύο ἐπιφάνειαι μία ἐπιφάνεια. Τῶνδε δυοῖν ἐπιφανειῶν μιᾶς ἐπιφανείας γενηθεισῶν, ἐξ ἀνάγκης ἔσται καὶ τὰ δύο σώματα ἓν σῶμα. Τῶν δὲ δυοῖν σωμάτων ἑνὸς γενομένων, ἡ παράθεσις οὐκ ἔσται παράθεσις, ἀλλ' ἕνωσις, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐπὶ τινῶν μὲν γὰρ σωμάτων δύναται ἡ παράθεσις ἕνωσις γίνεσθαι, καθάπερ ὕδατος καὶ τῶν ἐοικότων τούτῳ, ἐπὶ τινῶν δὲ οὐδαμῶς. Καὶ γὰρ λίθος λίθῳ παρατιθέμενος, καὶ σίδηρος σιδήρῳ, καὶ ἀδάμας ἀδάμαντι κατὰ γραμμὴν, οὐχ ἑνοῦνται. ὥστε οὐκ ἂν γένοιτο αἱ δύο γραμμαὶ μία γραμμή. *Si enim linea, quæ latitudine caret, terminus est superficiei; manifestum est, si superficies superficiei adjungatur, vel duas lineas parallelas fieri, vel unam eandemque ambas. Quod si duæ lineæ una linea fiunt; etiam duæ superficies unam facient superficiem; quandoquidem linea est terminus superficiei, superficies autem terminus corporis. At si duæ superficies unam faciunt superficiem, er-*

go necessarium est, duo corpora unum corpus fieri. Si vero duo corpora, conjungendo se invicem, unum fiunt: appositio non est appositio, sed unio: quod est impossibile. In quibusdam enim corporibus appositio est unio, ut in aqua & similibus: in quibusdam vero corporibus id nequaquam fieri potest. Nam & lapis lapidi appositus, & ferrum, ferro, & adamas, adamanti secundum lineam, non uniuntur invicem. adeoq; nec duæ lineæ fiunt una linea. Sed duo plana sibi invicem in linea recta conjungi, antea Geometrice demonstravimus: ex quo quidē principio id sequitur, duo quoq; solida plana in superficie se contingere. Quod vero Sextus pro absurdo habet, appositionem & unionem tum eandem rem fore, id quidem, si rectè accipiatur, absurditatem nullam in Mathematicis facit. Si enim duæ lineæ rectæ componantur invicem in directum, faciunt unam rectam lineam, majorem quidem utraque priorum, ambabus vero æqualem. Eodem modo si octo cubi conjungantur invicem, ita ut superficies, superficiei, accurate conveniat, faciunt cubum unum omnibus octo cubis æqualem. Neque video quid absurdi iin Geometricis hoc dare possit. Nam quod lapis lapidi, aut ferrum ferro hoc modo non uniatur, de eo in Physicis potius disputandum, vel si mavis in Mechanicis. Geometra enim neque lapides considerat, neque ferrum: sed generaliter omne illud quod in longum, latum, crassumque extenditur: atque eadem facilitate, qua quodvis corpus, in quotcunque æquales partes dividit, quæ simul

mul

mul junctæ, æquantur toti; eadem etiam, ex quotcunq; corporibus, aliud corpus componit, his omnibus æquale: quod sane Physicus aut Mechanicus nequaquam ea arte facere potest. Si enim cubus aliquis materialis in octo cubos erit dividendus, cubi isti minores, simul sumpti, non erunt æquales, & similes, cubo majori. Dum enim secatur cubus, perit aliquid ex materia: vel si materia est mollior, forma viciatur. Ideoque partes hæ omnes compositæ nunquam prius totum exhibere possunt, propter minutas istas portiones materiæ, quæ perierunt. In Geometricis autem, hæc omnia alio modo considerantur: neque enim materiales cubos, materialibus instrumentis, secat; sed intellectu secta, eo modo, esse intelligit, ut partes simul sumptæ æquentur toti. quod in Physica & Mechanica regulari sectione nunquam præstari potest. Quod si punctus dividens aut secans lineam, vel linea secans superficiem, vel denique superficies secans solidum, ullam in sectione dimensionem habuerit: tum vel partes lineæ, superficiei, aut solidi, huic dimensioni respondentes, detrahentur solido; adeoq; partes solidi justo minores erunt: vel etiam fiet penetratio dimensionum. Sed penetratio dimensionum est impossibilis: neque enim duo corpora, simul & semel, idem spatium implere possunt. Non potest ergo materialis cubus ullo modo, in octo cubos, toti æquales, materialiter dividi. Et tamen possunt, in quocunque solido cubo, octo cubi mente cõcipi, qui simul sumpti, integro

cubo æquales erunt. Atque hæc conſideratio ad Geometram pertinet. Si vero cubus, ita in octo partes ſectus, conſiderari poteſt; illud quidem, quod ſegmenta hæcce facere intelligitur, in quantum ſecat, omni craſſitie neceſſario carebit. Stultum ergo eſt à materialibus ad immaterialia argumentari. Neq; rationes Sexti quicquã concludunt quibus ſua firmare nititur. Καὶ γὰρ ἄλλως, εἰ ἕνωσις ἐστὶ τῶν δύο γραμμῶν μιᾶς γενομένων, καὶ σύμφυσις τῶν σωμάτων, ἐχρῆν τὸν χωρισμὸν γίνεσθαι, μὴ κατὰ τὰ αὐτὰ αὐτῶν πέρατα, ἀλλὰ καὶ ἄλλα καὶ ἄλλα μέρη ἀποσπωμένων, ὥστε καὶ φθορὰν συμβαίνειν. *Nam alioqui, quoniam eſt unio duarum linearum, quæ effectæ ſunt una; & corporum coitio & coaleſcentia: oporteret fieri ſeparationem, non per eosdem ipſorum fines, ſed dum avelluntur, per alias atque alias partes, adeo ut etiam contingeret interitus.* Sed hoc quidem, in materialibus ac craſſis rebus aliquam daret difficultatem; in corporibus autem, lineisve aut ſuperficiebus Mathematicis, ne conſiderari quidem meretur. Id enim quod conjungitur, etiam eodem modo Geometrice ſeparatur, quo conjungitur. Neque id corporibus, lineisve Mathematicis ullo modo nocet, quod in compoſitione eorum fieri exiſtimat Sextus, nempe ut uno termino priventur. Demonſtravimus enim antea, lineas quotcunque & puncta, invicem conjuncta, unum punctum unamque lineam facere; ita tamen, ut neque lineæ minores fiant, conjunctæ: nec majores, ſeparatæ. Et ſa-

ſane, in conjunctione hac linearum, non unum extremum perit: ſed ambo. Id enim quod antea extremum erat, extremum ulterius non eſt; ſed medium. Certè quocunq; loco concipiatur, extremum non eſt. Namque aliàs, res nunquam conjungerentur. Conjunctio enim & unio, proprie & accurate loquendo, eſt, quando duæ res ita inter ſe junguntur, ut unius extrema fiant extrema alterius. Sic in linea AB, in figura 8, AB & BD conjunctæ ſunt, ita ut hæ lineæ duo tantum extrema habeant nempe A & D. ita ut A, quod erat extremũ lineæ AB, ſit nunc extremũ BD. & B extremũ lineæ, BD ſit etiam extremũ AD. Cũ ergo in omni conjunctione novi termini acquirãtur, debent neceſſario, verſus partes conjunctionis, veteres termini & vetera extrema aboleri. Neq; enim plura verſus eaſdem partes extrema eſſe poſſunt. Si enim unum eſt extremum, aliud eo exterius eſſe nequit. Tum enim prius, extremum male diceretur; quandoquidem aliquid daretur hoc exterius. Debent ergo, in omni conjunctione & compoſitione, extrema, in partibus, ubi compoſitio ſeu conjunctio fit, neceſſario tolli. Neque enim alias ullo modo conjunctio vera & compoſitio fieri poteſt. Contra, ſi res ſeparentur, novos acquirunt terminos. Eſt enim ſeparatio ſeu diviſio, quando res ſub aliis terminis eſſe incipiunt, quam antea erant. Non ergo mirum eſt, ſi ea, quæ in compoſitione, terminos ſuos amiſerant; rurſum, in diviſione acquirant: cum & ea, quæ compoſita non concipiuntur, dividi tamen nequeant, niſi novos

vos terminos acquirant. Atque hoc non tantum in Geometricis verum eſt; ſed etiam in rebus materiatis: ſicut cuivis, rerum naturam accuratius conſideranti, patet. Non habet ergo linea ullam latitudinem: neque punctum ullam dimenſionem.

CAP. XIII.

Reſtant adhuc duo Sexti argumenta quibus linearum latitudinem probare conatur, quæ hoc capite examinabimus. Primum eſt, quod linea neceſſario latitudinem habeat, quandoquidem latitudinem metitur. Ὅταν γὰρ, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖα στρέφηται, καὶ δι' ἑαυτῆς καταγράφῃ κύκλον, τότε ἤτοι κατὰ πάντων τῶν μερῶν τοῦ ἐντὸς τῆς περιφερείας πλάτους φέρεται ἡ εὐθεῖα γραμμὴ, ἢ οὐ κατὰ πάντων, ἀλλὰ τινῶν. Καὶ εἰ μὲν κατὰ τινῶν φέρεται οὐδὲ καταγράφει κύκλον, καθ' ὧν μὲν μέρων φερομένη, καθ' ὧν δὲ οὔ. Εἰ δὲ κατὰ πάντων φέρεται, ὅλον τὸ τῆς περιφερείας καταμετρήσει πλάτος. Πλάτος δὲ καταμετροῦσα ἕξει πλάτος. Τὸ γὰρ τοῦ πλάτους καταμετρητικὸν, ὀφείλει πλάτος ἔχειν ᾧ καταμετρεῖ. *Quando enim quæ à centro ducitur recta linea vertitur & per ſeipſam deſcribit circulum, tunc aut per omnes partes latitudinis, quæ eſt intra circumferentiam fertur recta linea, aut non per omnes, ſed per aliquas. Et ſi per aliquas quidem fertur, ne deſcribit quidem circulum, ut quæ per aliquas quidem partes feratur, per aliquas vero non. Sin autem fertur per omnes, dimetietur totam circumferentiæ latitudinem. Latitudinem autem dime-*

metiens, habebit latitudinem. Nam quod eſt dimetiens latitudinis, latitudinem habere debet, qua metitur. Recta ergo linea circulum dimetiens, juxta Sextum, latitudinem habebit: adeoque linea omni latitudine carebit. Hoc ipſum alio adhuc argumento confirmat: nempe, cum diagonalis quadrati metiatur quadratum, hoc eſt, linea, planum ſeu latitudinem; ergo linea latitudinem habebit. Sed omnis fallacia in verbis conſiſtit. Geometræ, cum conſiderarent omnes omnino magnitudines triplici dimenſione comprehendi, cuivis dimenſioni, peculiare nomen impoſuerunt, ut res diſtinctæ, diſtinctis vocibus exprimerentur. Ita diſtantiam nudè conſideratam, inter duo quæcunque extrema alicujus corporis, vocarunt longitudinem. Si vero duæ dimenſiones ſimul conſiderarentur, tum vocabant latitudinem: non quod ſuperficies, in utramque partem, ſecundum longitudinem menſurari non poſſet, aut quod non æque verſus illas partes longitudinem haberet, ubi latitudo conſideratur, ac verſus illas, ubi longitudo; ſed ut longitudinem puram & ſine latitudine conſideratam, à latitudine diſtingverent, hoc eſt ſimplicem & primam dimenſionem, à duplici ſeu ſecunda & compoſita. Nulla ergo datur latitudo, in qua non ſumi poſſit longitudo. Sed longitudo ſine latitudine datur. Ut verbi gratia in cubo figura n. x. ſive ſumas intervallum ab A ad G, ſive ab A ad B, ſive ab A ad C, ſive denique ab A ad E, vel F, vel D, ſemper eſt longitudo quædam; & quocunque modo hoc inter-

tervallum ſumatur, potes ſemper habere longitudinem ſine latitudine; ſi ſolam diſtantiam inter duo puncta extrema conſideraveris. At vero ſi in hoc cubo non diſtantiam duorum punctorum, ſed integrum aliquod latus conſideraveris, utpote ABGC; habes longitudinem pariter ac latitudinem. In omni autem parte latitudinis datur longitudo. Quoniam enim latitudo eſt: terminos habet. Termini vero diſtant invicem, adeoque inter eos longitudo ſumi poteſt. Differt tamen longitudo à latitudine. Deniq; ſi totum cubum conſideraverim, habeo non tantum longum & latum; ſed etiam craſſum: & tamen in quacunque parte crasſitiei eſt longitudo, quia in quacunque ejus parte ſumi poteſt linea. Habet ergo linea primam & ſimpliciſſimam menſuram in ſe, qua omnes magnitudines menſurantur. Neque negant Geometræ vel latitudinem vel craſſitiem linea menſurari: tantū diſtinctis vocibus diſtinctas dimenſiones indicant Nempe, ſimpliciſſimam dimenſionem vocant lineam, qua omnium, quorumcunq; terminorum diſtantiæ ſumuntur: magis vero compoſitam dimenſionem, quæ juxta duas rationes menſuranda venit, neque unica illa ſimpliciſſima abſolvitur, ſuperficiem vocarunt. Tertiam deniq;, quæ non niſi triplici menſura cognoſcitur, corpori tribuerunt. Id ergo quod menſurat aliud; debet ſane quantum eſſe, & dimenſionem in ſe habere: ſed non eandē quam menſuratum. Simpliciſſima enim menſura, & ex qua cæteræ dimenſiones componuntur, facile compo-

positas metitur. Joculare ergo Sexti argumentum est, quod latitudinem mensurat, illud latitudinem necessario habet. Neque enim linea, sua latitudine mensurat aliam latitudinem; sed in superficie, distantiam tantum terminorum, & ab una, & ab altera parte sumit. Cumque in superficie duæ sint dimensiones, quæ quidem ambæ longitudine constant, & longitudine mensurantur; unam quidem dimensionem Geometræ longitudinem vocarunt, alteram latitudinem, usi hac in re vocibus vulgi. Sapientis enim est verba & voces ex communi hominum usu sumere, inde autem ad suum usum applicare.

Secundum Sexti argumentum est, quod, quoniam cylinder planum in linea tangat, circumvolutus autem planum describat: inde sequatur, lineas omnino latitudinem habere, quandoquidem, planum, hoc est, latitudinem, componant. Τὸν δὲ κύλινδρον φασὶ καθ᾽ εὐθεῖαν γραμμὴν ἅπτεσθαι τῆς ἐπιπέδου, καὶ ἐκκυλιόμενον τῇ ἀνὰ μέρος ἄλλων καὶ ἄλλων εὐθειῶν θέσει καταμετρεῖν τὴν ἐπίπεδον. Ἀλλ᾽ εἰ καὶ καθ᾽ εὐθεῖαν ἅπτεται τῆς ἐπιπέδου ὁ κύλινδρος, καὶ κυλιόμενος τῇ ἀνὰ μέρος ἄλλων καὶ ἄλλων εὐθειῶν θέσει καταμετρεῖ τὴν ἐπίπεδον, πάντως καὶ ἡ ἐπίπεδος συνέστηκεν ἐξ εὐθειῶν, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου πάλιν ἐξ εὐθειῶν πεπλήρωται. Ὅθεν ἐπεὶ ἔχει καὶ ἡ ἐπίπεδος πλάτος, καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ὁμοίως, καὶ οὐκ ἔστιν ἀπλατής, τὸ δὲ πλάτους ποιητικὸν ὀφείλει καὶ αὐτὸ πλάτος ἔχειν, δῆλον οὖν ὡς ὅτι καὶ εὐθεῖαι

γραμμαὶ συμπληρωτικαὶ οὖσαι τοῦ πλάτους, ἐξ ἀνάγκης πλάτος ἔχουσιν, ὥστε μηδὲν εἶναι μῆκος ἀπλατές, διὰ δὲ τοῦτο μηδὲ γραμμήν. *Dicunt etiam cylindrum per rectam lineam tangere planitiem, & evolutum metiri planitiem per partes ponendo alias atqve alias rectas. Quod ſi ita eſt, omnino etiam ex rectis conſtat planities: & cylindri ſuperficies rurſus completa eſt ex rectis. Unde quoniam & plana ſuperficies latitudinem habet, etiam cylindrica ſuperficies latitudinem habebit, neque erit ſine latitudine. At quod latitudinem facit, debet ipſum omnino latitudinem habere. Manifeſtum ergo eſt, quod quoniam rectæ lineæ expleant latitudinem, etiam neceſſario latitudinem habeant, ideoque, nec ullam longitudinem, expertem latitudinis: & propterea nec lineam.* Sed in hoc argumento vel falſum Sextus ſupponit, vel male concludit. Antea enim demonſtravimus ſuperficiem ex lineis non componi, & quamvis infinitæ numero lineæ in quacunque ſuperficie ſumi poſſint: non tamen lineas eſſe partes ſuperficiei. Idque ex hoc ipſo problemate quod Sextus heic proponit, manifeſtum fecimus: ita ut nemo contradicere poſſit, niſi qui inæquales magnitudines in totidem æquales partes ſecari poſſe contenderit. Omnes enim lineæ, quoad ſecundam menſuram, ſunt inter ſe æquales, nec ullam habent latitudinem. Imo ſi in gratiam Sexti poneremus, lineam, aliquam habere latitudinem, dicendum tamen omnino foret, lineam, id eſſe, qvod minimam la-

latitudinem habet. Unde, per hanc rationem, omnes lineæ, qvoad latitudinem, forent æquales: ſi quidem, omnes minimam latitudinem haberent. At tum quæ ex pluribus æqualibus latitudinibus componeretur latitudo, major eſſet, qvam qvæ ex paucioribus. Demonſtratum vero eſt, & maximam, & minimam latitudinem, æqvales numero lineas habere; nec plures in una, qvam in alia poſſe concipi. Ergo ex lineis ſuperficies non componitur, neque lineæ ſunt partes ſuperficierũ, neque latitudinem ipſius conſtituunt. Si igitur Sextus inde probare velit, lineam latitudinem habere, quia ſuperficiem conſtituit, adeoque latitudinem facit: falſum ſupponit. Neque enim ſuperficies componitur ex lineis. Quod ſi autem Sextus, hoc ipſum non ſupponere, ſed allata demonſtratione probare velit; jam falſum concludit ac male argumentatur. Neque enim ſequitur, quoniam cylinder tangit ſemper planum in linea; evolutus autem, planum deſcribit: quod ideo, vel cylindri ſuperficies, vel planum ex lineis componatur. Etenim in quacunque ſuperficie, tam circulari, quam plana, infinitæ lineæ ſumi poſſunt. Sed ſi quidem differant invicem, neceſſario inter eas datur ſuperficies: atque in circulari quidem circularis, in plana autem plana. Ac in plana quidem dari, hinc patet, quod duæ ſuperficies, in infinitum, quoad latitudinem, ſecari poſſint, ut antea demonſtratum: ideoque nec unquam ulla diviſione ad lineam perveniatur. Si enim ad lineam perveniri poſſet; ſuperficies

in infinitũ non divideretur. Atq; hoc in plana quidem ſuperficie antea demonſtravimus. In circulari autem ſuperficie idipſum inde liquet, quod ſicut in circulo, per quæcunque puncta, lineæ à centro ad peripheriam educantur; ita in cylindro per quaſcunque lineas plana ab axe cylindri per ſuperficiem educi poſſint. Quod ſi in circulo puncta fuerint diverſa, etiam eductæ lineæ diverſæ erunt, & circa peripheriam diſtabunt invicem, quæ diſtantia eo ſenſibilior, quo major circulus. At ſi diſtant, ergo linea inter eas ſumi poteſt. omnis enim diſtantia lineâ menſuratur. Quod autem in circulo per lineas & puncta, id in cylindro per plana & lineas demonſtratur. Nam ſi diverſæ in cylindri ſuperficie lineæ ſumantur, plana per axem ad ſuperficiem educta, diverſa erunt; adeoque, circa ſuperficiem, intervalla inter hæc plana; unde & latitudo. Sunt quidem hæc valde ſubtilia & intellectui non ſatis obvia, ſed mirum illud non eſt. Infinita enim, indiviſibilia & perpetuo ac in infinitũ diviſibilia, qui intelletu comprehendere ſe poſſe exiſtimat, infinitas intellectui ſuo vires adſcribit, pluraque ſibi tribuit, quàm habet.

CAP. XIIII.

Et hactenus quidem ea Sexti argumenta examinavimus, quæ contra eſſentiam puncti, linearum & ſuper, ficierum proponit: hoc autem capite, ea præ manibus ſumere volumus quæ adverſus corporis naturam atque eſſentiam dicuntur. Primo autem loco, argu-

gumentum proponit, quod palmarium exiſtimat, & quo omnia Geometrarum principia demoliri cogitat, quod quidem ex contactu corporum deſumit. Duo enim corpora tangunt ſe invicem quando conjungunguntur Tangunt vero ſe invicem ſuis extremis. Vel ergo extrema iſta corporum, ſunt corpora: vel etiam corpora non ſe invicem contingunt. At ſi extrema corporum ſunt corpora, ergo ſuperficies habebit profunditatem. Extremum enim corporis eſt ſuperficies. Si vero ſuperficies habet profunditatem, ergo linea quæ ſuperficiem deſcribit habebit latitudinem, & punctum quod lineam format, non omni carebit dimenſione. Hæc ſumma eſt argumenti ipſius: quod quidem eo facilius refutatur, quo ea quæ ad extremorum ſpeculationem pertinent antea à nobis manifeſtius ſunt explicata. Demonſtratum autem nobis eſt lineas quidem duas, quando ſe invicem in angulo tangunt, nullo modo contactum in linea facere, id enim plane eſſe impoſſibile: ſed in puncto. Et tamen punctum hoc non eſſe partem lineæ, ſed tántum ipſius extremum. Ita quoque in ſuperficiebus demonſtratum eſt, eas ſe invicem tangere in lineis, nec tamen lineas ex ſuperficiebus componi. Eodem ergo modo, etiam corpora ſe invicem tangunt non quidem in corpore ſed in ſuperficie. Si enim in corpore ſe tangerent; utique fieret penetratio dimenſionum, vel unius corporis ſuperficies alterius corporis ſuperficiei cederet, adeoque vel unius, vel amborum corporum ſuperficies mutaren-

rentur. Quando enim manus manum tangit, non tota manus totam manum tangit: ſic enim & arteriæ, & oſſa, & muſculi tangerentur invicem, ſingula à ſingulis, & omnia ab omnibus. At tum quidem neceſſario fieret penetratio dimenſionum: unumque corpus eſſet in loco alterius, adeoque duo corpora ſimul & ſemel uno in loco, quod eſt abſurdum. Quod ſi dicam cutim tangere cutim; verum id etiam eſt, ſed non qua corpus eſt. Etenim cum cutis craſſitiem habeat, pars illa quæ pingvedini adjacet illamque tangit, non tangit cuticulam. Ideoq; quando cuticula tangit cutim, non totã ipſius ſubſtantiam tangit, ſed tantum id quod cuticulæ adjacet. Verum quidem eſt ſi cuticula prematur ipſam quoq; cutim premi, una cum ſuppoſita pingvedine. Sed aliud eſt motus, aliud contactus. Omnis autem preſſio fit cum motu: imo ipſa preſſio eſt motus. Quod ſi rurſus cuticulam conſideremus, certum quidem eſt, eam, extremum corpus in manu eſſe. Illa tamen parte qua cutim tangit, alteram manum non tangit. Adeoque nec corpore toto tangit, ſed tantum extremo ſui. Sed in rebus materialibus, omnia tam accurate explicari nequeunt. Corpora enim materialia vix ſine aliqua colliſſione & violentia tangere ſe invicem poſſunt. Geometra vero contactum conſiderat ſeparatum à violentia. Sextus ergo heic antiqvum obtinet dum, à materialibus, ad ea quæ materie carent, male argumentatur. Id certum & clarum eſt, corpora ſe invicem eo plane modo contingere, quo plana, pla-

plana; & lineæ, lineas; hoc eſt ſuis extremis: neque extremum idem eſſe cum illo, cujus eſt extremum, ſed omnino differre invicem. Recte ergo dicitur, & corporum, & ſuperficierum, & linearum extrema ſe invicem tangere: & nihilominus, corpora, & lineas, & ſuperficies, tangere ſe invicem ſuis extremis. Quamvis enim ſuperficies, lineæ, & puncta, non ſint partes conſtituentes aut materiales corporum, planorum, aut longitudinum: ſunt tamen extrema corporum, & velut partes circumſcribentes ac termini. Sicut enim terminus agri, non eſt pars agri, ex quo ager componitur: nec tamen ager ſine termino eſt, & quorum termini ſe invicem tangunt, illi etiam agri ſe invicem tangunt: ita etiam nec corpora, nec ſuperficies lineæve, ex punctis, lineis, aut ſuperficiebus componuntur; & tamem ſingula ſingulorum, termini ſunt. Aliud ergo pars componens ſeu conſtituens; & aliud terminus. Pars componens ſeu conſtituens dat rei, id eſſe, quod eſt: terminus autem, dat rei eſſe finitum, neque in infinitum extendi, ſed certis limitibus circumſcribi. Quibus conſideratis, etiam alterum argumentum Sexti ſua ſponte ruit. Εἰ γὰρ inquit σῶμα ἐστὶν ὥς φασιν οἱ Γεωμέτραι τὸ τὰς τρεῖς ἔχον διαστάσεις μῆκος πλάτος καὶ βάθος, ἤτοι χωριστόν ἐστι τούτων τὸ σῶμα, ὥστε ἄλλο μὲν εἶναι τὸ σῶμα, ἄλλο δὲ τὸ μῆκος τοῦ σώματος, πλάτος δὲ τε καὶ βάθος, ἢ ὁ ἀθροισμὸς τούτων ἐστὶ τὸ σῶμα. Ἀλλὰ χωρίζε-

σθαι

σθαι μὲν τούτων τὸ σῶμα οὐ πιθανόν ἐστιν. Ὅπου γὰρ μήτε μῆκος ἐστὶ μήτε πλάτος μήτε βάθος, ἐκεῖ οὐχ οἷόν τε νοῆσαι σῶμα. Εἰ δὲ ὁ ἀθροισμὸς τούτων νοεῖται σῶμα, καὶ ἄλλο παρὰ ταῦτα οὐδὲν ὑπάρχει, ἐξ ἀνάγκης, ἐπεὶ ἕκαστον τούτων ἀσώματόν ἐστι, καὶ ἡ κοίνη τῶν ἀσωμάτων σύνοδος γενήσεται ἀσώματος. ὥσπερ γὰρ καὶ ἡ σύνθεσις τῶν στιγμῶν καὶ ἡ σύνοδος τῶν γραμμῶν ἀσωμάτων φύσει καθεστηκυιῶν οὐ ποιεῖ στερεὸν καὶ ἀντίτυπον σῶμα, οὕτω καὶ ἡ τοῦ πλάτους καὶ ἡ τοῦ μήκους ἤτε δὲ καὶ ἡ τοῦ βάθους συνέλευσις, ἀσωμάτους οὖσα, οὐκ ἂν ποιῆσαι στερεὸν καὶ ἀντίτυπον σῶμα. εἰ δὲ μήτε χωρὶς τούτων ἐστὶ τὸ σῶμα, μήτε ταῦτ᾽ ἐστιν, ἀνεπινόητον ὅσον ἐπὶ τοῖς Γεωμέτραις γίνεται τὸ σῶμα. *Si enim corpus, ut Geometræ ajunt, illud est, quod tres habet dimensiones, longitudinem, latitudinem & profunditatem: aut corpus est separabile ab his, ita quidem ut aliud sit corpus, aliud vero corporis longitudo, latitudo, & profunditas; vel harum dimensionum congregatio est corpus. At verosimile non est hæc à corpore separabilia esse. Ubi enim neq; est longitudo, neque latitudo, neque profunditas, illic non potest concipi corpus. Si vero congregatio horum intelligitur corpus, & hoc præterea nihil est; necessario sequitur quod cum singula separata careant corpore, etiam composita corpus non habeant. Sicut enim compositio punctorum, & linearum corpore carentium, nullum corpus solidum & resistens facit: ita etiam compositio latitudinis, longitudinis, & profunditatis, rerum incorpo-*

poralium, non facit corpus solidum & resistens. Si ergo neq; sine his corpus est, neq; hoc est: utique incomprehensibile id est quod Geometræ corpus appellant. Sed antea demonstravimus nec lineam ex punctis, nec superficiem ex lineis, generari: atque eodem modo nec corpus ex superficiebus. Unde nec hoc Sexti argumentum, neque quæ sequuntur, quicquam ad rem faciunt. In corpore quidem omnes tres dimensiones considerari possunt, sed hæ dimensiones corpus non constituunt. Sic color albus, in albo; niger, in nigro corpore, concipitur; neque corpus tale sine colore est: non tamen color est corpus; vel corpus illud est color. Ridicula igitur plane est Sexti nostri consequentia. Si corpus sine his non est, & tamen hæc corpus non constituunt, ergo corpus concipi nequit. Multa enim in corporibus, imo in quibuscunque rebus concipi possunt, ac revera in talibus rebus sunt, quæ tamen essentiam illius rei non constituunt. Diximus antea de colore, infinita corpora esse in quibus color est, & qui sine colore non existunt: nec tamen, color ideo est corpus, aut corpus illud necessario est color. Concipiuntur ergo dimensiones hæ in corpore, imo revera insunt corpori; quamvis essentiam ipsius, ut materia non constituant. Nullum enim corpus est, cui non aliqua sit longitudo, latitudo, & profunditas; imo sine his, ne corpus quidem concipi potest. Non tamen ideo sunt partes, ex quibus corpus componitur: sed dimensiones, quæ omne corpus necessario se-

qvuntur; quibus ſublatis tollitur corpus, & quæ ſine corpore non ſubſiſtunt, ſed nihil ſunt. Optandum quidem Sexto foret, ut quod tempus ſtultiſſimæ huic ſectæ impendit, id diſcendæ differentiæ, inter ſubſtantias & accidentia, tribuiſſet. Neque enim tam ridicula unquam propoſuiſſet, ſi ullam rerũ vulgatiſſimarum ſolidam unquam cognitionẽ habuiſſet. Verũ ignoraſſe hæc videtur, non quod ignoraret, ſed quod veritatem nulla aliàs fronte impugnare poſſet, ſi contra propriam ſcientiam aliquid diceret. Atque hæc ſunt illa, quibus eſſentiam linearum, punctorum, ſuperficierum, & ipſius denique corporis Geometrici evertere conatus fuit Sextus, ſane quam infæliciter. Nihil enim aliud his omnibus præſtitit, quam ut ſaniorum hominum, riſui ſe exponeret, iisq; exemplo eſſet qui ſimili ſtultitia & audacia, certiſſimas veritates manifeſtis falſitatibus evertere volunt, non quidem eruditionis aut ſapientiæ oſtentandæ cauſa, (ſapientia enim veritatis eſt cognitio & falſitatum fuga; eruditio autem eſt poſſeſſio ſapientiæ, non vanitatis aut ſtultitiæ) ſed ut aliis ambitionem prodant ſuam, & quam vacua cerebro geſtent capita, qui ne eas quidem veritates perſpicere aut ſequi poſſunt, quæ natura ipſa ſingulis hominibus implantavit. Sed dum delirando, vana ſectantur, non veritatem tantum, ſed & omnem quoque famam atq; exiſtimationem perdunt. Sibi tamen placent, ſicut & Sextus noſter, qui hæc quidem tanti fecit, ut etiam bis poneret, pleraque iisdem verbis, primo quidem in hoc

hoc libro adversus Geometras: postea vero in commentariorum libro VIII. ubi contra Logicos de toto & parte, aliisque eo spectantibus disputat. Quædam tamen aliis verbis & paulo plenius explicat, sicut illud quod antea proposuerat de puncto, quod tangere debeat planum in quo lineam describit. Sed de contactu corporum antea satis diximus. Id certum est, si corpus conicũ, vel aliud in solidum angulum desinens, imponatur plano cuidam corpori; tum duo ista corpora, tangere se invicem in puncto. Quod quidem ex iis, quæ hactenus demonstrata sunt facile per se intelligitur. Si vero corpus hoc pyramidale aut conicum, eodem situ moveatur super planum hoc in directum: lineam describet. Jam certum quidem est, lineam hanc absque contactu non generari: certumque est, corpus pyramidale, aut conicum, aliud corpus, semper in puncto tangere: nec tamen, vel contactus ille, vel lineæ descriptio sensibus, sed solo intellectu percipitur. Quæ ergo contra priora dicta sunt, ea etiam contra posteriora valent: cum eadem sint argumenta, iisdem verbis concepta; ut non opus fuisset, bis in eodem opere eadem scribere: nisi forte pulchrum duxerit, collectores versuum Homericorum imitari, qui plurimos versus, alicubi bis, alicubi ter, ponunt, iisdem verbis retentis. Sed cætera Sexti pertexamus.

CAP. XV.

Postquam diu cum lineis, superficiebus, & corporibus, infæliciter luctatum se animadvertisset Sextus; tan-

tandē hac pugna relicta, definitionem rectarum linearum, angulique & circuli adgreditur. Compertum fortè habebat nil difficilius Mechanico eſſe, quam rectam lineam ſenſibus aliquo modo exhibere. Videbat quoque vix unquam talem angulum, qualem Geometræ conſiderant, ullis ſenſibus concipi poſſe. Ideo heic ſperabat facilius ſibi ceſſura omnia. Verum non minus heic ſpe decidit ſua, quàm in prioribus. Videndum tamen quid dicat, & quas rationes proferat. Còntra rectæ quidem lineæ definitionem hoc argumentū proponit. Recta linea definitur à Geometris illa quæ partibus ſuis ex æquo interjacet. At vero rectā lineam dari inde probant quod partes æqualiter ſitas habeat. Ergo circulū committunt Geometræ, & idē per idē probant. Καίτοι πρὶν τούτων καὶ πρὸς τὰς ἀποβεβηκυίας αὐτῶν ἀρχὰς οὐκ ὀλίγα δυνατόν ἐστι λέγειν, οἷον ὅταν φασὶν εὐθεῖαν εἶναι γραμμὴν τὴν ἐξ ἴσου τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κειμένην. Ἵνα γὰρ τὰ ἄλλα παρῶμεν ἐκεῖνο μὲν συμφανές ἐστιν ὅτι τῆς γενικῆς γραμμῆς μὴ οὔσης, οὐδὲ εὐθεῖα γραμμὴ γένοιτ' ἄν. Εἶτα καὶ τὸ ἴσον λέγεται διχῶς, καθ' ἕνα μὲν τρόπον τὸ ἰσομέγεθες, καὶ μήτε ὑπερέχον ἐκείνου, τοῦ ᾧ λέγεται ἴσον, μήτε ὑπερεχόμενον, καθὸ καὶ τὸ πηχυαῖον ξύλον ἴσον εἶναι λέγομεν τῷ πηχυαίῳ. καθ' ἕτερον δὲ τὸ ἔχον ἐξ ἴσου τὰ μέρη κείμενα, τουτέστι τὸ ὁμαλόν. Οὕτω γοῦν τὸ ἴσον ἔδαφος καλοῦμεν ἀντὶ τοῦ ὁμαλόν. Διχῶς οὖν τοῦ ἴσου προσαγορευομένου ὅταν οἱ Γεωμέτραι τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν ὑπογρά-

φον

Φοντες φῶσιν, εὐθεῖά ἐστι γραμμὴ ἡ ἐξ ἴσου τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι κειμένη, ἤτοι τὸ κατὰ τὸ πρῶτον σημαινόμενον λαμβάνουσιν ἴσον, ἢ τὸ κατὰ τὸ δεύτερον. Ἀλλ' εἰ μὲν τὸ κατὰ τὸ πρῶτον, τελέως εἰσὶν ἀνόητοι. οὐδένα γὰρ ἔχει νοῦν τὸ εὐθεῖαν εἶναι γραμμὴν τὴν ἰσομεγέθη τοῖς ἑαυτῆς μέρεσι, καὶ μήτε ὑπερέχουσαν ταῦτα, μήτε ὑπερεχομένην ὑπὸ τούτων. Εἰ δὲ τὸ κατὰ τὸ δεύτερον, δι' αὐτοῦ τοῦ ζητουμένου διδάξουσιν· εἴ γε ὅτι μέν ἐστιν εὐθεῖα, περιστᾶσιν ἐκ τοῦ ὁμαλῶς τε καὶ ἐπ' εὐθείας ἔχειν κείμενα τὰ μέρη· τὸ δὲ ἐπ' εὐθείας τι κεῖσθαι οὐκ ἐστὶ μαθεῖν, μὴ ἐπιβάλλοντας τῇ εὐθείᾳ. *Quamquam antea non pauca dici possunt, adversus posita eorum principia, ut qvum dicunt, rectam esse lineam quæ sita est ex æquo suis partibus. Nam ut alia prætermittamus, illud quidem evidens, quod si non sit linea in genere, nec recta possit esse linea. Deinde æqvum seu æquale dicitur, duobus modis: uno quidem modo, id quod est æqualis magnitudinis, & neque id exsuperat, cui dicitur æquale, neque ab eo exsuperatur. Quomodo lignum cubitale dicimus esse æquale ligno cubitali. Altero autem, id quod habet partes ex æquo sitas, hoc est planum & æquabile. Ita ergo dicimus, solum æquale, pro eo quod est planum & æquabile. Cum ergo æquale dicatur duobus modis, quando Geometræ rectam lineam describentes dicunt (Recta linea est, quæ sita est ex æquo suis partibus) aut in primo significato accipiunt æqvum seu æquale, aut in secundo. Sed si in primo quidem significato, plane desipiunt. Nullum enim habet sensum*

sum, esse rectam lineam, quæ sit æqualis magnitudinis suis partibus, & neque eas superet, nec ab eis superetur. Sin autem in secundo, per idipsum quod quæritur docebunt; siquidem, quod recta quidem est, ostendunt, quod æquabiliter & in recta linea habeat partes. In recta autem linea aliquid esse situm, dicere non possumus; prius quam ad rectam animum adjecerimus. Sed primum quidem propria verba Geometrarum audienda sunt; inde Sexti argumenta consideranda. Definitiones igitur varias lineæ rectæ recenset Proclus, partim priorum, partim posteriorum Geometrarum. lib. II commentar. in primum Elem Euclidis. Ὁ δὲ Πλάτων ἀφορίζεται τὴν εὐθεῖαν γραμμήν, ἧς τὰ μέσα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ. Καὶ γὰρ τοῦτο, τὰ μὲν, ἐπ' εὐθείας ἀλλήλοις κείμενα πάσχειν ἀναγκαῖον, τὰ δὲ ἐπὶ κύκλου περιφερείας, ἢ ἄλλης διαστάσεως, οὐκ ἀναγκαῖον. Ὅθεν δὴ καὶ οἱ Ἀστρολογικοὶ φασὶν, τότε τὸν ἥλιον ἐκλείπειν, ὅταν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γένηται αὐτός τε καὶ ἡ σελήνη καὶ τὸ ὄμμα τὸ ἡμέτερον. Τότε γὰρ ὑπὸ τῆς Σελήνης ἐπιπροσθεῖσθαι, μέσης αὐτοῦ τε καὶ ἡμῶν γενομένης. *Rectam vero lineam Plato definit cujus media extremis opponuntur. Hoc enim iis necessario contingit quæ in directum sibi invicem jacent. Quæ vero alio modo distant, aliumve situm habent, vel juxta peripheriam circuli, vel alium quemcunque modum, id necessario non contingit. Quam ob causam ipsi quoque Astrologi, Solem tum deficere dicunt, quando in eadem recta linea fuerit cum Luna &*

no-

noſtro oculo. Tunc euim Lunam, mediam inter illum & nos, utrique (extremo) opponi. Atque hinc ſtatim quivis diſcit, rectam lineam, vere in natura exiſtere, cum tam mirabiles effectus habeat, lumenque illud dulcisſimum, & quo nihil in vita jucundius, terris eripiat. Sed de eo velle dubitare, an recta linea in natura eſſet, id quidem manifeſta foret inſania. Et Sextus qui Geometras inſaniæ arguere conatur, ipſemet ſtultitiam ſuam prodit, dum res manifeſtas, ſe percipere non poſſe, demonſtrat. Verum definitionem aliorum Geometrarum examinabimus. Euclides quidem his verbis definit Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. *Recta linea eſt quæ ex æquo punctis ſita eſt, quæ in ipſa ſunt.* Quæ verba ut melius intelligantur, Procli expoſitionem adponemus. Τὸν δὲ inquit loco laudato, τῆς εὐθείας ὁρισμὸν ὁ μὲν Εὐκλείδης τοῦτον ἀποδέδωκεν ὃν καὶ παρεθέμεθα καὶ δηλοῖ διὰ τούτων, μονὴν τὴν εὐθεῖαν ἴσον κατέχειν διάστημα, τὸ μεταξὺ τῶν ἐπ' αὐτῆς σημείων. ὅσον γὰρ ἀπέχει θάτερον τῶν σημείων θατέρου, τοσοῦτον τὸ μέγεθος τῆς εὐθείας τῆς ὑπ' αὐτῶν περατουμένης. Καὶ τοῦτο ἐστι τὸ ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις. Εἰ δὲ περὶ τῆς περιφερείας, ἢ καὶ ἄλλης τινὸς γραμμῆς, δύο σημεῖα λάβοις, τὸ μεταξύ τούτων ἀπολαμβανόμενον διάστημα τῆς γραμμῆς, μεῖζον ἐστι τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν. Καὶ πᾶσα γραμμὴ τοῦτο πεπονθυῖα φαίνεται, πλὴν τῆς εὐθείας. Καὶ ὁδεύοντας τὴν ἀναγκαῖον μόνην πορεύε-

σθαι

θαι κατὰ τὴν εὐθεῖαν φασὶ καὶ οἱ πολλοὶ, τοὺς δὲ μὴ ἐπ' εὐθείας, πλεῖον τῆς ἀναγκαίας. *Definitionem vero rectæ lineæ Euclides quidem eam dedit, quam nunc propoſuimus. Ea vero ſignificat, ſolam rectam æqualem eſſe intervallo, quod inter puncta ipſius ſumitur. Quantum enim fuerit diſtantia unius puncti ab altero, tanta eſt magnitudo rectæ lineæ, quæ his punctis terminatur. Et hoc eſt ex æquo interjacere punctis, in ſe ſumptis. Si enim circa circumferentiam aliamve quamcunque lineam duo puncta ſumantur; intervallum illud lineæ hujus inter duo hæc puncta ſumptum, majus erit diſtantiâ punctorum. Atque hoc omni lineæ contingit, niſi ſoli rectæ. Vulgus quoque eos, qui itinera conficiunt, ea ſpatia quæ ſunt juxta rectam lineam neceſſario conficere ajunt, cætera vero, quæ extra rectam lineam ſunt, præter neceſſitatem facere.* Videmus ergo quid Euclidi recta linea ſit, nempe idem quod verbis paulo clarioribus expoſuit Archimedes, minimam omnium inter eosdem terminos. lib. I. de Sphæra & Cylindro. Λαμβάνω δὲ ταῦτα τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν. *Aſſumo autem hoc, linearum quæ inter eosdem terminos ſumuntur, minimam eſſe rectam.* Proclus loco citato hoc modo definiſſe Archimedem rectam lineam ait. Ὁ δὲ αὖ Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. Διότι γὰρ, ὡς ὁ Εὐκλείδειος λόγος φησὶν, ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις,

διά

διὰ τοῦτο ἐλαχίστη ἐστὶ τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν. Εἰ γὰρ εἴη τις ἐλάττων, οὐκ ἐξ ἴσου κείσεται τοῖς πέρασιν ἑαυτῆς. *Sed & Archimedes rectam definivit lineam minimam earum quæ eosdem habent terminos. Quoniam enim (ut ex libro Euclidis constat) recta ex æquo suis punctis interjacet, propterea etiam minima est omnium eosdem terminos habentium. Si enim minor ulla esset alia, utiq; prior non ex æquo suis terminis interjaceret.* Ex quibus liquet, quomodo Euclidis definitio sit explicanda ac intelligenda, & quid recta linea Geometris proprie sit, nempe illa linea, quæ, distantiæ, duorum punctorum lineam terminantium, plane est æqualis. Dicit autem Euclides rectam hanc ἐξ ἴσου κεῖσθαι τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις, non vero ait τοῖς ἑαυτῆς σημείοις. Nempe Geometræ sæpenumero supponunt rectam lineam in infinitum productam. Quæ autem in infinitum educitur, terminos non habet, adeoque nec puncta terminantia. Inter puncta ergo hujus extrema nulla potest sumi distantia, quia puncta ipsa non dantur. Rectæ ergo lineæ infinitæ non conveniret definitio Euclidea, si quidem dixisset, eam esse rectam quæ punctis seu extremis suis ex æquo interjacet, seu quæ distantiæ inter sua extrema æqualis esset: cum infinita distantia haberi nequeat. Dixit ergo τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις *punctis quæ in seipsâ sumuntur.* Nimirum quocunq; in loco duo puncta in recta linea sumuntur, distantia horum punctorum est æqualis rectæ, quæ puncta hæc

conjungit: & recta, æqualis distantiæ. Liquet igitur ex his mala fide Sextum definitionem Geometricam rectæ lineæ citasse, cum ait, rectam esse ἥτις ἐξ ἴσου κεῖται τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς μέρεσι *quæ ex æquo partibus in ea sumptis interjacet.* Aliud enim est punctum, aliud pars lineæ. Neque verum est quod ait, Geometras explicare rectam lineam per planum, & planum per rectam lineam, hoc est circulum committere: utrumque enim falsum est. Rectam enim lineam explicant per minimam distantiam à suis extremis: & planam superficiem, etiam per minimam distantiam à suis extremis: utrumque optime & ex natura rei. Unica enim linea inter duo puncto sumi potest omnium minima, atque hæc recta est. Tum quoque unica tantum superficies inter duas lineas sumitur, omnium minima, quæ etiam superficies est plana. Atq; hæc adeo per se clara sunt ac manifesta, ut pluribus ea verbis explicare velle, esset de communi hominum notitia dubitare.

Nec saniora sunt quæ de natura anguli disputat. Οἷος δὲ ἐστιν ὁ περὶ τῆς εὐθείας λόγος τοιοῦτος γένοιτ' ἂν καὶ ὁ περὶ τῆς γωνίας. Πάλιν γὰρ ὅταν ὑπογράφοντες λέγωσιν ὅτι γωνία ἐστὶ δυοῖν εὐθειῶν μὴ κατ' ἄλληλα κειμένων τὸ ὑπὸ τὴν κλίσιν ἐλάχιστον. ἤτοι ἐλάχιστον λέγουσι τὸ ἀμερὲς σῶμα, ἢ τὸ κατ' αὐτοὺς σημεῖον καὶ στιγμήν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ἀμερὲς σῶμα οὐκ ἂν εἴποιεν, ἐπείπερ τούτου μὲν οὐδὲ εἰς δύο μέρη δύναται διαιρεῖσθαι· ἡ δὲ γωνία κατ'

αὐτοὺς ἐπ' ἄπειρον τέμνεται. καὶ ἄλλως τῆς γωνίας ἣν μὲν μείζονα φασὶν εἶναι ἣν δὲ μικροτέραν. τοῦ δὲ ἐλαχίστου σώματος οὐδὲν ἐστι βραχύτερον, ἐπεὶ ἐκεῖνο ἀλλ' οὐ τοῦτο γενήσεται ἐλάχιστον. Λείπεται ἄρα τὸ καθ' αὐτοὺς σημεῖον εἶναι λέγειν. ὃ καὶ αὐτὸ τῶν ἀπόρων. Εἰ γὰρ πάντη πανταχῶς ἀδιάστατον, οὐ διαιρεθήσεται ἡ γωνία, οὐ μὴν οὐδὲ μείζων τὶς ἔσται ἢ ἐλάσσων γωνία. Ἐν γὰρ τοῖς μηδεμίαν ἔχουσι διάστασιν οὐκ ἂν εἴη τις κατὰ μέγεθος δαφορὰ. ἄλλως τε εἰ μεταξὺ τῶν εὐθειῶν πίπτει τό σημεῖον, διορίζει τὰς εὐθείας. διόριζον δὲ οὐκ ἔσται ἀδιάστατον. *Quale autem est quod de recta dicitur, tale est etiam quod dicitur de angulo. Rursus enim quando dicunt describentes, Angulus est duarum linearum non in directum jacentium, id quod est minimum sub inclinatione: aut minimum dicunt corpus, quod caret partibus; aut quod est, ut ipsi volunt, signum & punctum. Sed corpus quidem carens partibus non dicent, quoniam id nemo potest in duas partes dividere. Angulus autem ut ipsi volunt secatur in infinitum. Et alioqui ex angulis alium quidem dicunt esse majorem, alium vero minorem. Minimo autem corpore nihil est brevius: cum aliàs non illud, sed hoc minimum tum esset. Restat ergo ut dicant id quod est, ut ipsi censent, signum: quod ipsum quoque cadit in dubitationem. Si enim signum est ejusmodi, ut nullo modo nec ulla ratione ullum suscipiat intervallum ac dimensionem: non dividetur angulus. sed nec erit ullus major aut minor angulus. Iis enim quæ nullum habent spatium ac dimensionem, non po-*

poteſt eſſe ullæ in magnitudine differentia. Et alioqui ſi inter rectas cadit punctum, diſtingvit rectas. Quod autem diſtingvit, non utique caret dimenſione. Sed videtur heic Sextus ut Geometras argueret, ipſe ſibi definitionem confinxiſſe. Sane cum non unum aut alterum Geometrarum de ponte dejicere, ſed totam Geometriæ ſcientiam vanitatis arguere in animo haberet: debebat utiq; illam maxime definitionem oppugnare, tali quæ ab illo Geometra eſſet propoſita, quem cæteri omnes Mathematici pro optimo ac ſolide docto haberent. Euclides quidem multo ante Sextum Empiricum tempore ſua conſcripſerat, magnamque penes omnes Mathematicos auctoritatem obtinuerat. Debebat utique Sextus, cum contra Geometriam in genere aliquid moliretur, optimum in ea ſcientia maximæq; auctoritatis ſcriptorem impugnare. Definit autem Euclides angulum rectilineum his verbis Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. *Planus angulus eſt, duarum, quæ in eodem plano ſunt, linearum, ſe invicem tangentium, & non in directum jacentium, ad invicem inclinatio.* De minimo Sexti nullum heic verbum. Ideoque nec argumentum ipſius contra Geometriam eſt. Sunt tamen quædam in hoc ipſo Sexti argumento falſa, de quibus antea monitum. Proponit vero aliam quoque definitionem quam impugnat. Verum neque eſt Euclidis, ſed aliorum Geo-

me-

metrarum, ut in ſequentibus docebimus. Ἀλλ' εἰώθασί τινες ἐξ αὐτῶν γωνίαν λέγειν τὸ ὑπὸ τὴν κλίσιν πρῶτον διάστημα. *Sed ſolent inquit quidam ex iis angulũ appellare primũ intervallum ſub inclinatione*. At cum alia definitio melior & magis naturæ rei conveniens apud alios Geometras daretur: non debebat ob paucorũ imperitiam tota ſcientia male audire. Atque hæc quidem Sextus contra anguli definitionem proponit, quæ tamen contra Geometras nihil concludunt, cum præſtantiſſimi Geometræ alias definitiones habeant. Quoniam vero nobis propoſitum eſt non ea tantum inquirere quæ ab Sexto contra Mathematicos dicuntur, ſed etiam illa quæ ab aliis vel proponuntur, vel proponi poſſunt: ſequenti capite varias præſtantiſſimorum Mathematicorum ſententias de anguli natura ac definitione in medium adducemus, ut veritas rei omnibus pateat.

CAP. XVI.

Quam difficile ſit atque arduum naturas rerum accurata definitione explicare; illis cognitum eſt qui naturam paulo diligentius ſunt rimati. Vix enim quicquam in tota natura eſt, quod ita definiri poſſit ut nihil in ea definitione ſit vitioſum. Res enim vulgatiſſimæ & ubivis obviæ difficillime cognoſcuntur: ideoque nec facile definiuntur. Lapides natura tanta copia produxit, tantaque varietate, ut vix ullus ſit mortalium qui ignoret, quid lapis ſit. Nemo tamen perfe-

fectam omnibusq; numeris abſolutam lapidis definitionem unquam dedit, aut dare poteſt. Quid humano generi magis neceſſarium, ideoque majori copia à divite natura procreatum, quam fruges & fructus? Neque tamen vel tritici, vel ſecalis, vel hordei accuratam definitionem quisquam mihi dederit. Deſcriptiones quidem qualescunque harum aliarumque rerum habentur, & definitiones quas vocant cauſales: tales vero quales jure debebant eſſe, aut quæ naturam harum perfecte explicant, non dantur: eo quod natura ipſa perfecte cognita non eſt. Quot plantæ, arbores, gemmæ in natura exſtant, quarum ſola exterior ſpecies & figura cognita eſt? cætera latent, ideoque nec ullo modo talium rerum definitio dari poteſt. Neque tamen ideo quisquam ſanus hæc in natura eſſe negaverit, aut nihil plane eſſe dixerit, ipſorũve externa accidentia ut falſa damnaverit: eo quod accurata rei definitio cognita non ſit. Ita quoque in Geometria non ſequitur, angulum nihil eſſe, aut vanam de quantitate anguli quæſtionem à Geometris moveri; eo quod natura & eſſentia angulorum cognita non ſit, vel ſaltem verbis plene atque accurate explicari nequeat. Ipſimet quidem Veteres Geometræ non conveniunt in definitione anguli, neque ſatis accurate explicare poſſunt, ad quod prædicamentum referri debeat, cum in tanta angulorum diverſitate non omnes ſub eodem genere comprehendi poſſe videantur. Notatum hoc Proclo, & ab eodem conciliatio atque explicatio hujus difficul-

cultatis quæſita, commentario in hanc definit. Euclidis. Neque tamen omni cx parte mihi ſatisfacit. Quicquid ſit, de angulo conſtat, eum in natura rerum eſſe, & omnino unum angulum altero eſſe majorem, quod Geometræ ſupponunt. Nam operoſa illa quæſtio de natura & definitione anguli Geometræ neceſſaria non eſt. Sufficit noviſſe quam rem Geometra voce anguli deſignet: quod quidem ex deſcriptione ab Euclide allata ſatis liquet. Aliud ergo eſt quærere an angulus ſit: aliud, quid ſit, & in quo prædicamento. Geometræ ſupponunt angulum eſſe: unumque angulum altero majorem. Quod ſane neque ab ullo mortalium negari poteſt. Naturam quoque anguli eo modo explicant, ut plenior cognitio illius rei Geometræ non ſit neceſſaria. Atque in his conveniunt Geometræ. Quando vero de eo diſputatur in quo prædicamento angulus ſit, jam non ulterius Geometrica quæſtio agitur, ſed Logica vel Metaphyſica. Hoc ergo quod Sextus urget contra Geometras, non Mathematicum eſt: ſed Logicum aut Metaphyſicum.

Ut vero omnis ſcrupulus Lectori eximatur, placet hanc quoque controverſiam paucis abſolvere. Eudemus Peripateticus in libro quem de angulo ſcripſit, in prædicamento Qualitatis angulum eſſe exiſtimabat, ſi quidem fides habenda erit Proclo, cujus verbis potius quam meis hæc proponam. Lib. II. comment. in I Euclidis. Εὐδήμος μὲν ὁ Περιπατητικὸς βιβλίον περὶ γωνίας γρά-

ψας

ψας ποιότητα αὐτὴν εἶναι συνεχόρησεν. Γένεσιν γὰρ γωνίας ἐπινοῶν οὐκ ἄλλην εἶναι φησὶν ἢ τὴν κλίσιν τῶν γραμμῶν. Εἰ δὲ ἡ εὐθύτης, ποίοτης, καὶ ἡ κλάσις, ποίοτης, ἐν ποιότητι ἔχουσαν αὐτὴν τὴν γένεσιν πάντως εἶναι ποιότητα. *Eudemus quidem Peripateticus librum de angulo ſcribens, in Prædicamento Qualitatis eum eſſe affirmavit. Cum enim anguli ortum ac conſtitutionem conſideraret, non aliud angulum eſſe pronunciabat quam linearum inclinationem. Si vero rectitudo eſt qualitas, & fractio quoque eſt qualitas; utique angulus, cujus conſtitutio in qualitate conſiſtit, omnino erit qualitas.* Verum multa ſunt ex quibus probari poteſt angulum non eſſe qualitatem. Nunc quidem ea tantum recenſebo, quæ à Proclo adferuntur paulo ante hæc verba. Καὶ αἱ γωνίαι ποιότητες δῆλον ὅτι οὐκ ἂν εἶεν. Τῆς γὰρ ποιότητος τὸ μᾶλλον καὶ ἧττον οἰκεῖα πάθη, καὶ οὐ τὸ ἴσον καὶ ἄνισον. ἔδει τοίνυν μὴ λέγειν ἀνίσους γωνίας, καὶ τὴν μὲν μείζονα, τὴν δὲ ἐλάττονα, ἀλλ' ἀνομοίους, καὶ τὴν μὲν μᾶλλον γωνίαν, τὴν δὲ ἧσσον. Ταῦτα δὲ ὅτι τῆς τῶν Μαθημάτων ὑπάρξεως ἐστιν ἀλλότρια παντίπου καταφανές. Πᾶσα γὰρ γωνία τὸν αὐτὸν ἐπιδέχεται λόγον, καὶ οὐχὶ ἡ μὲν ἐστι γωνία μᾶλλον, ἡ δὲ ἧσσον. *Quod vero anguli qualitates non ſint manifeſtum. Qualitatis enim propria affectio eſt, ſuſcipere magis ac minus; non vero æquale eſſe aut inæquale. Alioqui, non oportebat dicere angulos eſſe inæquales, & unum quidem majorem alterum vero minorem:*

ſed dicendum foret angulos eſſe diſſimiles, & hunc quidem magis eſſe angulum, illum vero minus. At vero hæc Mathematicæ conſtitutioni plane contraria eſſe, manifeſtum eſt. Omnis enim angulus eandem habet rationem, neque unus magis eſt angulus, alter vero minus. Plura non addam: cum ex his clarum ſit, angulum in prædicamento qualitatis non eſſe. Verum neq; ad quantitatem referri debet: neque angulus magnitudo dici. Placuit id quidem Plutarcho Mathematico, qui ante Apollonium floruit, ipſumq; Apollonium in eam ſententiam ſecũ pertraxit, ut ex eodẽ Proclo diſcimus, qui etiam definitionem illam anguli nobis dederunt, quam Sextus ultimo loco adfert, quamvis verbis nonnihil immutatis. Ποσότητα δὲ λέγουσιν αὐτὴν ὅσοι φασὶν τὸ πρῶτον διάστημα ὑπὸ τὸ σημεῖον εἶναι τὴν γωνίαν· ὧν καὶ ὁ Πλούταρχος ἐστιν εἰς τὴν αὐτὴν δόξαν συνωθῶν καὶ τὸν Ἀπολλώνιον. Δεῖ γὰρ εἶναί τι φησὶ διάστημα πρῶτον ὑπὸ τὴν κλάσιν τῶν περιεχουσῶν ἐπιφανειῶν. *Angulum vero quantitatem illi dicunt, qvibus definitur, primum intervallum ſub puncto. Inter quos eſt Plutarchus, ipſum quoque Apollonium in eam compellens ſententiam. Dicunt enim, oportere aliquod intervallum primum eſſe, inter ſectionem linearum aut ſuperficierum, quæ angulum comprehendunt.* Sed hæc ſententia non tantum ab ipſo Sexto ſatis bene refutatur, ut antea vidimus, verum etiam à Proclo paucis verbis rejicitur. Ita enim ait. Καί τοιγε συνεχοῦς ὄντος τοῦ ὑπὸ τὸ σημεῖον δια-

στήματος, ἀδύνατον τὸ πρῶτον λαβεῖν. Ἐπ᾽ ἄπειρον γὰρ πᾶν διάστημα διαιρετόν· πρὸς τῷ καὶ ἐὰν ὁποσοῦν ἀφορίσωμεν τὸ πρῶτον, καὶ δι᾽ ἐκείνου γωνίαν ἀγάγωμεν, γίγνεσθαι τρίγωνον, ἀλλ᾽ οὐ μίαν γωνίαν. *Enimvero ſi intervallum illud quod ſub puncto eſt continuum fuerit, primum nulla ratione ſumi poteſt. Omne enim intervallum in infinitum dividitur. Propterea, ſi quantumcunque intervallum ſumamus, illudque ut primum ſeparemus, angulum per id ducentes, fit triangulum, non vero unus angulus.* Verba Procli paulo ſunt obſcuriora, ideoque paucis ea explicabimus. In figur. n. II. ſi angulus CAB dicatur intervallum primum ſub puncto, erit ergo vel CB, vel FH, vel KI, vel MN, vel PQ, vel ST, vel XY, vel αβ, vel δε, vel ſi in infinitum progrediaris, ſpatiū tribus quibuscunq; lineis comprehenſum, quarum duæ ſunt partes linearum AC & AB. tertia autem alia quædam recta. At vero tale ſpacium non unum dat angulum, ſed integram format figuram, nempe triangulum. Quodcunque ergo intervallum ab intervallo CAB, ablatum fuerit, anguloq; CAB attributum: id non angulum formabit, ſed triangulum, nempe vel AFH, vel AKI, vel AMN, & ſic in infinitum. Neque ullum intervallum ſumi poteſt primum, cum totum hoc intervallum in infinitum dividatur. At in infinito nihil eſt primum: cum eo ſemper aliud prius dari poſſit; ſi quidem diviſio in infinitum procedat. Quod ſi intervallum hoc continuum ſumatur, neque dividatur; tum nihil in eo primum eſt, quandoquidem

omnia

omnia ſimul ſunt. Mala eſt ergo & Plutarchi & Apollonii definitio, ab ipſis Geometris rejecta: ideoque non opus fuiſſet hanc ut Geometricam à Sexto refutari. Carpus vero Antiochenus angulum quidem ad quantitatem retulit, nec tamen, vel ſuperficiem, vel lineam eſſe voluit, quod recenſet & uno verbo refutat Proclus. Κάρπος δὲ ὁ Ἀντιοχεὺς πόσον μὲν εἶναί φησι τὴν γωνίαν καὶ διάστημα τῶν περιεχουσῶν αὐτὴν γραμμῶν ἢ ἐπιφανειῶν· καὶ ἐφ' ἓν διεστὼς τοῦτο, μὴ μέντοι διὰ τοῦτο γραμμὴν εἶναι τὴν γωνίαν. οὐ γὰρ πᾶν τὸ ἐφ' ἓν διαστατὸν ὑπάρχειν γραμμήν. Τοῦτο δὲ πάντων παραδοξότατον, εἰ ἔστι τι μέγεθος ὑφ' ἓν διάστατον ἔξω γραμμῆς. *Carpus vero Antiochenus angulum quidem quantum eſſe dicit, & intervallum linearum aut ſuperficierum quæ eum comprehendunt. Et hoc quidem intervallum juxta unum punctum diſtare: nec tamen ideo lineam eſſe. Hoc vero omnium maxime abſurdum eſt: dari magnitudinem, quæ juxta unum punctum diſtat, neque tamen ſit linea.* Proclus rem unico tantum verbo indicare voluit, nimirum, perabſurdum eſſe, ſi quis vellet affirmare, ullam magnitudinem, præter lineam ſeu longitudinem, in iis poſſe conſiderari, quæ diſtant quidem invicem, ſed tamen juxta unicam menſuram. Angulum vero magnitudinem non eſſe vel hinc patet. Si enim magnitudo eſt: ergo cum alia magnitudine poteſt conferri. Quæ vero comparantur invicem, habent quoque rationem inter ſe. Magnitudines autem quæ rationem invicem habent, poſſunt ſe invicem exedere

ſi multiplicentur: per Def. IV. libr. V. Elem. Eucl. Ergo ſi angulus eſt magnitudo, poteſt etiam multiplicatus quemcunque alium angulum excedere, idque in infinitum, & tamen ſemper erit angulus. At in figura numero. V. ſi angulus EBL triplicetur, excedit quidem angulum EB: ſi vero quadruplicetur, deſinit eſſe angulus. Lineæ enim EB & BF in directũ jacent, adeoq; angulum non conſtituunt. Quod ſi quintupletur educta recta BL. in ϱ. erit EBϱ angulus æqualis LBF angulo, utpote ad verticem. Exterior vero angulus deſinet eſſe id quod erat. Hoc idem argumentum, ſed in angulis cornutis, demonſtratum habes, apud Proclum, loco laudato, quod inde peti poteſt. Angulus ergo non eſt quantitas.

Verum neque in Prædicamento Relationis eſt. Si enim angulus nil aliud eſſet quam relatio, utique in unoquovis angulo, unica tantum atque eadem eſſet relatio. Unus enim idemque angulus unam eandemq; faceret relationem. At in angulis mixtis v. g. ex recta linea & circulari, vel eo, quem cornutum vocant, alia eſt relatio rectæ lineæ ad circularem, & alia circularis ad rectam. Cum ergo duplex ſit relatio, ergo idem angulus non unus eſſet angulus ſed duplus, ſive duo anguli: quod eſt abſurdum. Proclus hæc alio exemplo demonſtravit, ex hemicono deducto, cujus angulus verticalis componitur ex angulo trianguli plani, & ipſius præterea ſuperficie coni. Sed noſtra demonſtratio clarior eſt. Non eſt ergo angulus in prædicamento Relatio

nis.

nis. Neq; tamem verũ illud videtur quod Proclus affirmat, Euclidem, eosq; omnes, qui angulum inclinationem definiunt, in Prædicamento Relationis ipsum posuisse. Εὐκλείδης δὲ καὶ ὅσοι κλίσιν εἰρήκασιν ἐν τοῖς πρός τι καταλέγουσι. *Euclides vero , & quotquot inclinationem* angulum *dixerunt inter relata ponunt*. Sane nusquam hoc dixit Euclides: saltem, inter ea opera, quæ exstant, id nusquam legitur. Neque vero inclinatio ad Prædicamentum Relationis proprie spectat, sed ad illud, quod Latini vocant prædicamentum Situs: Aristoteli dicitur κεῖσθαι. Est enim omnis incliatio situs aliquis, quæ si fuerit duarum rectarum linearum in eodem plano, oritur angulus planus rectilineus : si fuerit duarum linearum curvarum, oritur angulus curvilineus. Quod si fuerit trium pluriumve superficierum , oritur angulus solidus. Quoniam vero in situ varia considerantur, nempe, res ipsæ quæ situm habent, & distantiæ rerum, quæ intali situ sunt: etiam ista accidentia anguli in aliis prædicamentis considerantur. Neq; novũ est, eandem rem in uno quidem prædicamento esse, pro varia autem consideratione etiam in diversis poni. Sic triangulum, quatenus talem habet figuram, est in prædicamento qualitatis : quatenus vero talem talemve magnitudinem habet, in prædicamento quantitatis consideratur. Ita ergo angulus quatenus ex rectis curvisve lineis componitur, est vel rectilineus vel curvilineus, adeoque in prædicamento qualitatis : quate-

nus vero, inter latera angulum comprehendentia, majus minusve ſpatium fuerit, eſt in prædicamento quantitatis, & quantitatem vere habet. Quibus conſideratis omnia clara ſunt ac perſpicua: adeoque omnes Sexti objectiones vanæ.

Duas quidem adhuc ad finem operis ſui in medium adducit, quarum tamen utraq; ex dictis facillime refutatur. Una eſt contra Definitionem circuli: altera contra propoſitionem x.lib.I Elem.Euclidis. Contra circulum ait, ſublatis omnibus lineis, neq; circulum quicquam eſſe, quod quidem contra omnes figuras cæteraſque omnes definitiones valeret, ſiquidẽ ullius precii foret. Sed triumphum ante victoriam agere ſtultorum eſt. Nos demonſtravimus, non tantum puncta, lineas & ſuperficies vere in natura eſſe, ſed etiam Sexti argumenta ne ſapiente quidem homine digna. Cum ergo & lineæ omnis generis, & puncta, & ſuperficies vere concipiantur à Geometris: certum etiam eſt, non tantum circulum, ſed & cæteras omnes figuras concipi recte poſſe, earumque definitiones omnibus modis veras eſſe.

Illud quoque quod contra X. Propoſitionem lib. 1. Elem adfertur tale eſt, ut à quovis ſolvi poſſit, qui priora accurate perlegerit. Argumentum Sexti eſt. Ὅταν οὖν λέγωσιν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν δίχα τεμεῖν ἤτοι τὴν ἐπὶ τοῦ ἄβακος δεδομένην λέγουσι διχοτομεῖν, ἢ τὴν ἀπὸ ταύτης κατὰ μετάβασιν νοουμένην. Οὔτε δὲ τὴν ἐπὶ τοῦ ἄβακος δοθεῖσαν δι-

χο-

χοτομεῖν ἐροῦσιν. αὕτη γὰρ μῆκος καὶ πλάτος αἰσθητὸν ἔχειν φαίνεται. ἡ δὲ καθ' αὑτοὺς εὐθεῖα γραμμὴ μῆκός ἐστιν ἀπλατές. ὥστε μὴ οὖσα καθ' αὑτοὺς ἡ γραμμὴ ἡ ἐπὶ τοῦ ἄβακος, οὐδὲ δίχα τμηθήσεται, ὡς γραμμή. Καὶ μὴν οὐδὲ ἡ ἀπὸ ταύτης κατὰ μετάβασιν νοουμένη. Ὑποκείσθω γὰρ λόγου χάριν ἐξ ἐννέα στιγμῶν συνεστῶσα ἀφ' ἑκατέρου μὲν τῶν ἄκρων τεσσάρων καὶ τεσσάρων ἀριθμουμένων, μιᾶς δὲ τὰς δύο τετράδας μεσολαβούσης στιγμῆς, οὐκοῦν εἰ δίχα τέμνεται ἡ ὅλη γραμμὴ, ἤτοι μεταξὺ ταύτης τῆς πέμπτης στιγμῆς καὶ τῆς ἑτέρας τετράδος φέρεσθαι τὸ τέμνον, ἢ καθ' αὐτῆς τῆς πέμπτης, ὥστε καὶ αὐτὴν διχάζειν. Τὸ μὲν οὖν μεταξὺ τῆς πέμπτης στιγμῆς καὶ τῆς ἑτέρας τετράδος φέρεσθαι τὸ τέμνον, τῶν ἀτόπων. γενήσεται γὰρ ἄνισα τὰ τμήματα, καὶ τὸ μὲν ἐκ τεσσάρων στιγμῶν, τὸ δὲ ἐκ πέντε. Τὸ δὲ αὐτὴν διχάζειν τὴν στιγμὴν, πολλῷ τοῦ προτέρου ἀλογώτερον. οὐκέτι γὰρ ἀδιάστατον ἀπολείψουσι σημεῖον ὅγε διχάζεται πρὸς τοῦ τέμνοντος. *Quando ergo dicunt datam rectam in duas partes ſcindere, aut eam ſcindere docent quæ in abaco eſt, aut eam quæ per tranſitum hujus intelligitur. Sed eam quæ in abaco eſt bifariam dividi non dicent, cum ea manifeſtam habeat latitudinem. Recta autem ex eorum ſententia omnis eſt expers latitudinis. Quare cum illa quæ in abaco eſt, linea ex ipſorum ſententia non ſit, neque illa ut linea in duas partes ſecabitur. Verum neq; illa quæ per tranſitum hujus intelligitur. Ponatur enim aliqua con-*

constans ex novem punctis, quatuor quidem punctis ab utroque extremorum numeratis, uno autem puncto duos quaterniones intercipiente in medio. Ergo si in duas partes tota scinditur linea, aut inter quintum hujus punctum, & alterum quaternionem feretur id quod secat, aut in ipso quinto, ita ut eum dividat bifariam. Atque ferri quidem inter quintum punctum & alterum quaternionem id quod secat, à ratione est alienum. Tum enim segmenta forent inæqualia, unum quidem quinque punctorum, alterum vero quatuor. Ipsum autem punctum in duas secari partes est magis absurdum quam prius. Neque enim punctum amplius erit indivisibile, omnibusque carens partibus. Verum antea manifestissime demonstravimus lineam ex punctis nullo modo componi: tum quoque maximam minimamque lineam æqualia numero puncta habere, hoc est in una, tot sumi posse puncta, quot in alia. Denique si mille puncta jungantur invicem, unicum tantum punctum conficere, adeoque si eadem mille puncta ita in unum composita divellantur invicem, punctum tamen esse indivisibile. Sophisma ergo Sexti de novem punctis, ne hili quidem est, cum nulla usquam sit linea in qua infinita numero puncta sumi non possint, adeoque in illa quæ novem puncta habet, possint & mille puncta concipi. Et cum linea neutro modo ex punctis componatur, utique, nec in bisectione una pars longior sit altera, neque punctum dividatur. Illud quoque quod Sextus ait de centro circuli, quod in circuli divisio-

visione, bifariam dividatur, falsum plane est. Neque enim superficies ex punctis componitur, imo ne ex lineis quidem, ut antea fuit demonstratum. Ideoque non sequitur, quod, circulo seu superficie plana circulari bifariam divisa, etiam centrum seu punctum bifariam dividatur. Hæc ergo omnia falsis hypothesibus nituntur, nullamq; solidam demonstrationem continent. Atq; ita quidem ea omnia quæ à Sexto Empirico contra Geometras proponuntur accurate examinavimus & falsa vanaq; omnia esse deprehendimus. Nunc de cæteris veritatibus Geometricis porro agendum erit.

CAP. XVII.

Hactenus quidem materiam Geometricam examinavimus, earumque rerum definitiones percurrimus, quæ à Geometris considerantur: qua quidem re id præstitimus, ut non tantum ea quæ à Sexto Empirico adversus Geometras scripta sunt, vanitatis ac falsitatis convincantur, sed & earum rerum natura, quæ in Geometricis consideratur, certo cognita sit ac demonstrata. Nam cum constet, puncta, lineas, superficies & angulos omnis generis non tantum vere existere, sed etiam id esse, quod Geometræ supponunt: utique & manifestum erit, quæ ex his componuntur triangula, quadrata, pentagona. &c. aut quæ hæc supponunt, ut parallelæ lineæ, in natura existere. Certum quidem est Euclidem totam materiam Geometricam definitionibus heic non explicasse, cum sibi

Q suffi-

ſufficere arbitraretur, ſi ea tantum de quibus tractare vellet, Lectori ob oculos poneret, ipſique paucis definitionibus indicaret quas res talibus verbis denotaret. Neque ſane dixerim, hæc ita ab Euclide fuiſſe præſtita, ut nihil deſideretur. Nam ut alia omittam, in demonſtrationibus quidem ſæpiſſime meminit linearum in directum jacentium, quarum tamen definitionem nusquam invenies. Quod ſi dixeris propria vocis nomenclatura id indicari: reſpondebo idipſum quoque in Triangulo, pentagono, aliisque fieri; quorum tamen definitionem ὁ ϛοιχειώτης dedit. Et quam neceſſaria ſit definitio linearum in directum jacentium, poſtea manifeſtum faciemus. Hac ergo forte in parte, aliquo modo, carpi poſſet Euclides, quod rerum neceſſariarum definitiones omiſiſſet. Sed nulli via veritatis occluſa eſt; omnibus adhuc patet, ſemperque patebit. Multa ſane Euclides præſtitit, & plura quam ullus alius, quorum lucubrationes in eo ſcribendi genere habemus. Sed poſt tantam meſſem, aliquod dari ſpicilegium, quid mirum? Id ſane cuivis veritatis amanti ſufficit, quod nihil falſi Euclides ſuppoſuerit, neque in tanta demonſtrationum copia, ullum paralogismum fecerit; quod cæteri vix ſunt aſſeqvuti. Fateor quidem, ipſum quoque Euclidem alicubi id ſupponere, quod neque tam clarum eſt, ut ſupponi aut pro conceſſo aſſumi debeat, neque ab ipſo ſit demonſtratum. Id tamen quod ſupponit falſum non eſt. Et quamquam ab ipſo demonſtratum non ſit, ab aliis tamen

men

mẽ facili via, nulloq; labore demonſtrari poteſt, ut poſtmodũ docebimus. Ac tantum quidem de definitionibus I. libri Elementorum dicta ſunto. Quod enim cæterorum librorum definitiones attinet, de iis ſequenti libro dicendum. Hoc vero ea omnia pertexere nobis animus eſt, quæ contra primum Elementorum Euclidis ab ullo unquam mota fuere, vel jure moveri poſſunt. Et cum principio hujus ſcriptionis, hypotheſes Geometricas in Definitiones, Poſtulata atque Axiomata diviſerimus, atque Definitionum naturam hucusque ſatis accurate explicuerimus: nunc de Axiomatibus ac Poſtulatis agemus.

CAP. XVIII.

Axiomata quidem, proprie & accurate loquendo, ſola & præcipua eſſe demõſtrationis Geometricæ principia, in confeſſo eſt: quæ ideo talia eſſe oportet, ut ab nemine ſano negari poſſint. Et priora quidem IX. Euclidis, talia omnino eſſe, nemo ſapiens unquã negaverit. Quis enim ſana mente præditus, has veritates omnes & ſingulas certiſſimas eſſe non perſpexerit? Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενα ἐστὶν ἴσα. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῆ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα αφαιρεθῆ, τὰ λοιπά ἐστὶν ἄνισα. Καὶ τὰ τοῦ αυτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλ-

ληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐςί. Καὶ τὸ ὅλον τῦ μέρϛς μεῖζον ἐςί. *Quæ eidem æqualia, etiam inter ſe ſunt æqualia. Et ſi æqualibus æqualia addantur, tota fieri æqualia. Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur reſidua eſſe æqualia. Et ſi inæqualibus æqualia apponantur, tota eſſe inæqualia. Et ſi ab inæqualibus auferantur æqualia, reſidua eſſe inæqualia. Et ejusdem dupla inter ſe eſſe æqualia. Et ejusdem dimidia etiam inter ſe eſſe æqualia. Et quæ congrunnt invicem, inter ſe ſunt æqualia. Totum majus ſua parte.* Sunt enim hæc omnia natura cognita, & cum divinæ auræ particula, omnibus & ſingulis hominibus implantata. Si enim accurate omnia & ſingula perſcrutemur, magnoque & diligenti ſtudio humanas actiones cum brutorum animantium comparemus, certo deprehendemus, nihil eſſe quo quidem ceu certa ac infallibili nota & charactere, illæ ab his diſtingvi poſſint, niſi ſolius veritatis & ſapientiæ cognitione atque amore. Primæ autem veritates, vel ſaltem inter primas, hæ ſunt, quas nunc ex Euclide propoſuimus. Scio quidem Claudium Galenum libro de optimo genere docendi περὶ ἀρίςης διδασκαλίας de Carneade Academico referre ne ipſum id quidem pro vero habuiſſe quod primo loco ponimus, Nempe quæ eidem æqualia etiam inter ſe ſunt æqualia. Ὁ γϛν Καρνεάδης ϛδὲ τϛτο τὸ πάντων ἐναργέςατον συγχωρεῖ πιςέυειν, ὅτι τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα μεγέθη, καὶ ἀλλήλοις ἴσα γίγνεται. *Carneades itaque neque illud quod omnium eſt evidentiſſimum concedit eſſe credendum. Quæ eidem æquales ſunt magnitudi-*

nes

nes etiam inter ſe ſunt æquales. Verum iſta objectio ne refutatione quidem digna eſt. Inſani enim hominis deliria ſi quis confutare & falſitatis convincere vellet, næ is ſapientioribus irriſui eſſet. Compeſcenda quidem aliquando horuncce hominum impudentia & audacia, quod & egregie in laudato nunc opere præſtitit Galenus, cujus rationes ideo nos non adferemus, ne aliorum ſcrinia compilare velle videamur. Neque tamen ideo cum hiſce diſputandum, ut veritas demonſtretur: Id enim impoſſibile, (Primæ enim veritates nullo modo demonſtrari poſſunt) ſed tantum, ut ſtultitia & dementia talium hominum omnibus ob oculos ponatur, cæterique qui inſanire volunt deterreantur. Hæc ergo omnia quæ recenſuimus Axiomata talia ſunt, ut nec demonſtrari poſſint, neq; à quoquam falſitatis redargui aut convinci. Præter iſta vero quædam alia axiomata proponuntur quæ ſane non eandem habent naturam. Quamuis enim vera ſint, tamen non ita natura cognita ſunt ut priora; neq; ſine demonſtratione vera eſſe deprehenduntur. Sunt vero hæc. Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλοις εἰσί. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλόμεναι αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι ἐπ' ἄπειρον, Συμπεσοῦνται ἀλλήλοις ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες γωνίαι. Καὶ δύο εὐθεῖαι χώριον οὐ περιέχουσι. *Omnes recti anguli inter ſe ſunt æquales. Et ſi induas rectas recta incidens internos & verſus eaſdem partes*

angulos minores fecerit duobus rectis, concurrent illæ duæ rectæ, si in infinitum educantur, versus illas partes, ubi sunt duo anguli duobus rectis minores. Et duæ rectæ lineæ spatium seu superficiem non comprehendunt. Prima enim harum vera quidem est, sed tamen sine demonstratione vera esse non intelligitur. Sane propositio XX. lib. I. Elem. *Duo latera ejusdem trianguli rectilinei, majora sunt reliquo quomodocunque sumpta* non minus clara est ac certa quam hæc assertio. *Omnes anguli recti inter se sunt æquales.* Epicurei quidem affirmabant illam quam nunc laudavimus propositionem, adeo claram esse: ut etiam asinus, qui demonstrationes Geometricas non intelligit, hoc per se perspiciat, ideoque irridebant Geometras, qui tam manifesta demonstrarent. Auctor Proclus libr. III. comm. in I. Euclid. ad hanc ipsam Propositionem. Verum de Epicureis alibi videndum. Id tantum dico, cum Euclides hanc tam claram ac evidentem veritatem sine demonstratione proponere noluerit, debebat utique illa etiam demonstrasse, quæ his clariora non sunt, imo quorum veritas magis in obscuro est. Veritas autem hujus sententiæ *Si in duas rectas recta incidens angulos internos ad easdem partes minores fecerit duobus rectis, tum rectas illas concurrere, si in infinitum producantur, versus illas partes, ubi sunt anguli duobus rectis minores*, est magis intricata, imo multo obscurior, quam hæc *Omnis trianguli rectilinei, duo latera, tertio majora, quomodocunque sumpta.* Saltem illa

illa aſſertio nullo modo inter Axiomata aut κοινὰς ἐννόιας poni debet, quod neque ab Euclide factum arbitror. Proclus enim inſignis & pervetuſtus commentator Euclidis, inter poſtulata hæc fuiſſe poſita ſubindicat, præter ult:mum quod pro axiomate recenſet. Ipſemet vero partim ex aliorum mente, partim juxta propriam ſententiam adſtruit inter poſtulata non debere poni. lib. III. comment. in I. Euclid. Δῆλον, ὅτι τὸ, πάσας ὀρθὰς εἶναι ἴσας τὰς γωνίας, οὐκ ἐστιν αἴτημα, οὐδὲ τὸ πέμπτον, τὸ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα τις ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς εὐθείας συμπίπτειν ἐφʼ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι. Κατὰ δὲ τὸ δεύτερον οὐκ ἔσται ἀξίωμα το, δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν ὃ καὶ νῦν τινες ὡς Αξίωμα προσγράφουσι. *Manifeſtum eſt, quod hoc, Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales, Poſtulatum nequaquam ſit: ſicut neque quintum poſtulatum, ſi in duas rectas recta incidens, internos & ad eaſdem partes angulos minores fecerit duobus rectis, tum lineas iſtas eductas concurrere verſus eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores. Juxta ſecundam vero rationem non erit axioma, Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt, quod etiam nunc quidam inter axiomata recenſent.* Ex quibus liquet, tres haſce aſſertiones ſeu enunciationes inter Axiomata ab Euclide poſitas non fuiſſe, ſed primam quidem & ſecundam inter Poſtulata, fuiſſeque hanc, poſtulatum quintum,

tum, ultimam vero à quibusdam, tantum inter axiomata relatam. Videtur autem Theo Alexandrinus, vel ſaltem ejus domeſtici, familiares aut diſcipuli, hæc omnia inter Κοινὰς ἐννοίας poſuiſſe & pro axiomatibus habuiſſe. Græcus enim Textus Euclidis [quem hodie legimus, eſt ἐκ τῶν Θέωνος ϛυνουσιῶν. *Ex editione familiarium Theonis*, ut in ipſius operis titulo cernitur. Quicquid ſit, certum quidem eſt inter Axiomata hæc non poſſe collocari, cum axiomata debeant eſſe αὐτόπιϛα & ἀναπόδεικτα, *per ſe credibilia & non demonſtrabilia*: qualia quidem hæc noſtra non ſunt. An vero inter Poſtulata poni debeant ſequenti capite diſpiciemus.

CAP. XIX.

Qui veritates rerum inveſtigare volunt id accurate obſervabunt, ne vel in manifeſtis veritatibus demonſtrationes quærant, vel non manifeſtas & claras ſine demonſtrationibus admittant. Utroque enim modo certitudo atque evidentia tollitur, priori quidem, quod, ad certiſſimarum rerum demonſtrationem, minus certa ſupponere cogamur: poſteriori vero, quod ex incertis certa demonſtrari nequeant. Virtus autem in medio conſiſtit, quæ neque in infinitum demonſtrationes quærit, neque neceſſarias negligit. Peccarunt vero in his duo inſignes Mathematici Apollonius quidem in exceſſu, Euclides vero in defectu. Is enim dū certiſſima axiomata, demonſtrare conatur, & quæ ipſum naturæ lumen vera eſſe docet: alia ſupponere

co-

cogitur, minus clara certaque. Euclides autem dum alia non minus clara, imo ejusdem plane generis demonstrat, quædam vero supponit ut axiomata, increpationem & censuram aliorum non effugit. Verba Procli sunt comm III. in I. Elem Euclidis. Μάτην οὖν τῶν Ἀξιωμάτων Ἀπολλώνιος ἐπεχείρησεν ἀποδείξεις ἀποδιδόναι. Ὀρθῶς γὰρ καὶ ὁ Γεμῖνος ἐπέστησεν ὅτι οἱ μὲν τῶν ἀναποδείκτων ἀποδείξεις ἐπενόησαν, καὶ ἀπὸ ἀγνοστέρων μέσων τὰ γνώριμα πᾶσι κατασκευάζειν ἐπεχείρησαν· Ὃ δὴ πέπονθεν ὁ Ἀπολλώνιος δεικνῦναι βουλόμενος, ὅτι ἀληθές το ἀξίωμα τὸ λεγόν· τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα εἶναι. Οἱ δὲ καὶ τὰ ἀποδείξεως δεόμενα ἐν τοῖς ἀναποδείκτοις προσειλήφασιν, ὡς αὐτὸς Εὐκλείδης τό τε πέμπτον ἄιτημα καὶ τὸ τέταρτον. Καὶ γὰρ τοῦτό τινες ὡς αμφίβολον, ἀποδείξεως δεῖσθαί φασι. Καὶ πῶς γὰρ οὐ γελοῖον, ὧν τὰ ἀντίστροφα θεωρήματά ἐστιν ἀπόδεικτα, ταῦτα ὡς ἀναπόδεικτα προστάττειν. Ὅτι γὰρ τῶν συμπιπτουσῶν εὐθειῶν ἁι ἐντὸς (perperam in edito legitur ἐκτὸς) ἐλάττους εἰσι δυοῖν ὀρθοῖν, αὐτὸς ὁ Εὐκλείδης δείκνυσιν ἐν ἐκείνῳ θεωρήματι. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσὶ πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Ἀλλὰ καὶ ὅτι οὐ πάντως ἡ τῇ ὀρτῇ ἴση ὀρθὴ ἐστιν, δείκνυται σαφῶς. Οὐκ ἄρα ἀναπόδεικτα τούτοις ἀντιστρέφοντα συγχωρητέον φησὶν ὁ Γεμῖνος. Ἔοικεν οὖν, κατὰ τὴν τούτου διάταξιν, τρία μὲν εἶναι αἰτήματα, τὰ λοιπὰ δύο δεῖσθαι τῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης, αὐ-

τά τε καὶ τὰ ἀντιστρέφοντα αὐτοῖς. Ἐν δὲ τοῖς ἀξιώμασι, τὸ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν, προσκεῖσθαι περίττως· εἴπερ δι᾽ ἀποδείξεως ἔχει τὸ πιστόν. *Frustra ergo demonstrationem Axiomatum molitus est Apollonius. Vere enim Geminus ait, eos qui indemonstrabilia demonstrare sunt conati, ex incertis & incognitis, omniũ clarissima & maxime cognita probare voluisse. Quod & ipsi Apollonio evenit, dum id demonstrare vult quod dicitur. Quæ eidem æqualia, etiam inter se sunt æqualia. Quidam vero & ea quæ demonstrari debent, ut indemonstrabilia supposuerunt, inter quos Euclides, qui hoc modo quartnm & qvintum Postulatum supposuit. Utrumque enim ut dubium demonstratione quidam indigere affirmarunt. Et nonne ridiculum est, hæc ut indemonstrabilia supponere? cum inversa horum theorematum demonstrentur. Nam quod duo interni anguli linearum concurrentiũ minores sint duobus rectis, ipsemet Euclides demonstravit hoc Theoremate. Omnis trianguli duo anguli minores sunt duobus rectis; quomodocunque sumpti. Verum quod neq; semper omnis angulus æqualis recto, sit rectus, clare demonstratur. Non ergo ea quæ cum his theorematibus convertuntur, sine demonstratione assumere licet, ait Geminus. Solent ergo quidem juxta hanc rationem tria tantum esse postulata. Duo vero reliqua demonstratione indigent, non minus quam conversa illorum theoremata. Inter Axiomata vero superfluum hoc est, Duæ rectæ spatium non comprehendunt, quandoquidem*

dem veritas hujus ex demonstratione pendeat. Et ſane utrumq; tam Apolloniũ quam Euclidem hac in parte peccaſſe manifeſtum. Quod enim Geminus ait Apolloniũ, ex incognitis ac minus certis certa probare voluiſſe, res ipſa declarat. Axioma enim hoc, *Quæ eidem æqualia etiam* inter ſe ſunt æqualia, tali quidem modo probare voluit, ut eſt apud Proclum lib. III. comment. in I. Euclid. Verba Procli integra adſcribam ut & ſententia Apollonii, & quid de ea ſit ſtatuendum una diſcatur. Ὅτι δὲ καὶ ἡ ἀπόδειξις ἣν Ἀπολλώνιος εὑρηκέναι πέπεισται τοῦ πρώτου τῶν Ἀξιωμάτων οὐδὲν μᾶλλον ἔχει τὸ μέσον τοῦ συμπεράσματος γνωριμότερον, εἰ μὴ καὶ πλέον ἀμφισβητούμενον, μάθοι τις ἂν ἐπιβλέψας εἰς αὐτὴν καὶ σμικρόν. Ἔστω γὰρ φησὶ τὸ Α τῷ Β ἴσον, τοῦτο δὲ τῷ Γ. λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Γ ἴσον. Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α. τῷ Β. ἴσον, τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον, καὶ τὸ ἄρα Α. τῷ Γ. τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. Ἴσα ἄρα ἐστίν. Ἐν δὲ τούτοις δύο προλαβεῖν ἀναγκαῖον. Ἓν μὲν ὅτι τὰ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον ἀλλήλοις ἴσα ἐστὶν, ἕτερον δὲ ὅτι τὰ τῷ αὐτῷ τὸν αὐτὸν κατέχοντα τόπον καὶ ἀλλήλοις τὸν αὐτὸν κατέχει τόπον. Ταῦτα δὲ ὅτι πολλῷ ἀσαφέστερα τοῦ προθέντος Ἀξιώματος ἐναργές. *Quod autem demonſtrationem primi Axiomatis attinet, quam Apollonius ſe inveniſſe credit, medius in ea terminus non tantum ipſa concluſione magis cognitus non eſt, verum majore etiam difficultate premitur, ut cuivis, qui eam parumper examinare voluerit, facile patebit. Ita*

enim ait. Sit A. quantum, æquale quanto B. Hoc vero sit æquale quanto G. dico quod A. ipsi G. sit æquale. Quoniam enim A. & B. invicem sunt æqualia, ergo æqualem locum occupabunt. A. ergo & G. etiam æqualem locum occupabunt, & per consequens inter se erunt æqualia. In his autem necessarium est duo supponere, unum, quæ æqualia loca occupant inter se esse æqualia. Alterum, quod quæ eidem eundem locum occupant, & inter se eundem occupent locum. Quod autem hæc multo sint obscuriora quam præsens Axioma, cuivis manifestum. Ex quibus liquet male Apollonium demonstrationem Axiomatis in medium adduxisse, ideoque Axiomata in Geometricis demonstrari non posse, sed esse ἀναπόδεικτα. Quod autem de Axiomatibus verum est, id certa quadam ratione ipsis quoque postulatis convenit. Qua enim methodo recta linea Geometrica, vel accuratissima quæcunque alia, a puncto ad punctum duci possit, in Geometricis demonstrari nequit. Imo si subtiliter res gerenda, ne circulus quidem Geometricus describi potest, modusve in Geometria proponi, quo id fiat. Quis enim ulla arte lineam circularem descripserit, omni carentem latitudine. Et si quidem id fieri posset, quo modo planum illud nancisceretur, in quo talis circulus esset describendus. Unde neque recta terminata ita produci Geometrice potest, cum planum, in quo ducenda est, non habeatur. Vix enim tales rectas taliave plana acquirere possumus, quæ omni sensibili vitio careant: quanto minus tale habebi-

bebimus, in quo intellectus nihil desideret. Ponit ergo Geometra hæc omnia ita in rerum natura dari: modum vero quo dentur, aut dari possint, non demonstrat. Non ergo Postulata possunt demonstrari, sed ea supponere cogimur. Ea autem quæ Geometra de lineis circulisve demonstrat, principaliter quidem ac proprie vera sunt de linea & circulo Geometrico: sensibiliter autem vera etiam de lineis sensibilibus, aliisque planis ac superficiebus sensibilibus, deprehenduntur. Quoniam vero Axiomata & Postulata non demonstrantur, neque demonstrari possunt; sequitur duas hasce Propositiones Omnes recti anguli inter se sunt æquales, &, Si in duas rectas recta incidens, duos angulos internos ad easdem partes minores fecerit duobus rectis, tunc lineas versus illas partes concurrere &c. vere nec Axiomata esse, nec Postulata, cum ambæ accurate demonstrari, & possint, & debeant. Quod enim omnino debeant demonstrari, inde liquet; quod conversa horum ab ipso Euclide demonstrentur: & quod præcipuum est, hæc natura sua adeo clara non sint, ut sine demonstratione pro certis admitti debeant. Conversum enim quinti Postulati est Propositio XVII. libr. I. Cujusvis trianguli duo anguli minores sunt duobus rectis, quomodocunque sumpti, seu quod idem est, si in rectas lineas concurrentes recta incidat, angulos internos facit duobus rectis minores. Quoniam ergo hoc demonstratur de angulis, ergo idipsum de concurrentia laterum etiam demonstrari debet.

Et ſane, cuivis res æquius examinanti, liquet, hoc Poſtulatum per ſe cognitum non eſſe. Neque illud de angulis rectis tam clarum eſt, ut ſine omni alia cognitione intelligi poſſit. Quomodo autem hæc duo demonſtrentur, ſequenti capite proponemus.

CAP. XX.

Quod ergo illam Propoſitionem attinet *Omnes anguli recti inter ſe ſunt æquales* Proclus quidem hoc modo eam demonſtravit libro. III. comment in I. Euclid: in hunc ipſum locum. Ἔστωσαν δύο ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ, λέγω δὴ ὅτι ἴσαι εἰσίν. Εἰ γὰρ μή· ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἔστω ἡ πρὸς τὸ Β. Ἐφαρμοζομένης ἄρα τῆς ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ ΕΖ ἐντὸς πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗ. καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ. ἐπὶ τὸ Θ. Ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΘ, καὶ ἴσαι ἀλλήλοις. Ἔχομεν γὰρ ἐν τοῖς ὅροις, ὅτι ἡ ὀρθὴ γωνία ἴση τῇ ἐφεξῆς. Ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΘ μείζων τῆς ὑπὸ ΑΒΗ. Πάλιν ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΗ ἐπὶ τὸ Κ. Ἐπεὶ οὖν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΗ. καὶ ἡ ἐφεξῆς ὀρθή, διὰ ταῦτα καὶ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΒΗ. ὥστε ἡ ὑπὸ ΑΒΘ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΒΗ. Ἀλλὰ καὶ μείζων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐστὶν ὀρθὴ μείζων ὀρθῆς. *Sint* (in ſchemate XI.) *duo recti anguli comprehenſi* ΑΒΓ *&* ΔΕΖ: *dico quod inter ſe ſint æquales. Si enim id verum non eſt, utique alter horum major erit Adaptetur* ΔΕ *ipſi* ΑΒ. *Cadet ergo* ΕΖ *intra* ΒΓ. *Cadat vero ut* ΒΗ, *& producatur* ΒΓ *in* Θ. *Quoniam ergo angulus ſub* ΑΘΒ *eſt rectus, erunt bini an-*

anguli æquales invicem. Etenim in definitionibus habemus, quod rectus angulus sit æqualis illi qui deinceps est angulo. Angulus ergo ABΘ *major est angulo* ABH. *Rursum educatur* BH *in* K. *Quoniam ergo angulus* ABH *est rectus, & qui deinceps est, etiam rectus, ideoq; æqualis ipsi* ABH: *erit utique angulus* ABΘ *minor angulo* ABH. *Sed & major est. quod est absurdum. Non ergo rectus angulus major est recto.* Quoniam vero demonstratio non tam facile sine schemate intelligi potest, nos una cum Latina interpretatione schema adjecimus. Heic vero paucis demonstrationẽ explicabimus. Argumentatur auctor reducendo adversarium ad absurdũ, qui modus argumentandi satis freqvens est in disciplinis Vel enim angulus alteri angulo æqualis erit, vel major, vel minor. Si æqualis est, lis est composita. Si vero adversarius hoc negaverit, utiq; vel major erit altero angulo, vel minor. Dicat nunc adversarius ABΓ in dato schemate majorem esse ΔEZ. Si ergo recta ΔEZ inponatur ipsi ABΓ, ita ut ΔE congruat cum AB. tum EZ non congruet cum BΓ. Si enim congrueret, utique anguli æquales forent per Axioma VIII. adeoque hinc falsitatem suæ sententiæ videret adversarius. Quod si ergo non congruunt: utique, cum AB Γ sit major quam ΔEZ, ergo EZ cadet intra AB & B Γ. Cadat v. g. in BH. Producatur vero recta B Γ in Θ. Definitio autem recti anguli hæc est, si recta super rectam consistens angulos utrinque æquales fecerit, tum ambos illos angulos esse rectos. Cum ergo AB recta su-

ſuper rectam BΓ conſiſtens, ab una parte rectum faciat angulum AEΓ: & ab altera, rectum huic æqualem faciet. Erit ergo ABΘ æqualis ABΓ & per conſequens major quam ABH, hoc eſt quam ΔEZ. Verum ſi recta HB producatur in K: erit etiam, ex hypotheſi adverſarii angulus ABK rectus & æqualis angulo ABH. Angulus enim ABH ex hypotheſi adverſarii eſt angulus ΔEZ hoc eſt rectus. In rectam autem lineam HK, inſiſtens recta AB, cum ab una parte rectum angulum faciat, etiam ab altera parte rectum faciet angulum: adeoque KBA æqualem ABH. Eſt vero KBA angulus major ABΘ angulo. ergo & ABH major erit ABΘ angulo. Antea vero concluſum fuit, ex hac eadem adverſarii hypotheſi, ABH minorem eſſe angulo ABΘ. Idem ergo angulus, eodem angulo, & major eſt, & minor. At falſum conſequens, ergo & antecedens. Adeoque rectus angulus nec major eſt altero quocunque recto angulo, nec minor: ideoque æqualis.

Poteſt autem hoc ipſum alia breviori atque expeditiori methodo demonſtrari. Cum enim ex definitionibus conſtet, obtuſum & acutum angulum à recto differre, eum quidem, quod recto major ſit, hunc vero quod recto ſit minor; itaq; in hoc eodem diagrammate, ſi dicatur ABΓ rectus, major eſſe recto ΔEZ, dematur ergo aliquid angulo ABΓ, ut reſiduum æquale fiat angulo ΔEZ. Quantumcunque vero illud fuerit quod aufertur, ſemper angulus reſiduus minor erit angulo ABΓ. ut v. g. ſi auferatur HBΓ ab angu-

lo ABΓ, residuus angulus ABH minor erit angulo ABΓ. Est vero ABΓ rectus. Qui autem recto minor est, acutus est, non vero rectus. Si ergo ΔEZ minor fuerit ABΓ. utique non rectus erit, sed acutus. Eodem modo si ΔEZ dicatur major esse ABΓ, seu quod idem est, ABΘ: addatur aliquid. Quantumcunque vero illud fuerit, quod adjicitur, semper majorem angulum faciet recto ABΘ. seu ABΓ. Ut si ΘBK addatur ABΘ, erit angulus ABK major angulo ABΘ. At angulus ABΘ est rectus. Qui autem recto major est angulus, non rectus est, sed obtusus. Ergo angulus ABK non est rectus, sed obtusus. Et si ΔEZ convenit angulo ABK, utique non rectus erit, sed obtusus. Rectus ergo angulus, non potest esse vel major, vel minor, altero recto. Si enim major fuerit, non rectus erit, sed obtusus. Sin minor: non rectus est, sed acutus. Adeoque omnes anguli recti inter se erunt æquales.

Quod autem demonstratum est de rectis angulis, eos omnes inter se esse æquales, id de converso hujus Propositionis non valet, nempe omnes angulos æquales, esse rectos. In certo quidem casu verum est, nempe si recta rectam ita secuerit, ut omnes anguli sint æquales, tum verum est hosce angulos esse rectos. Adeoque verum etiam est, si anguli, vel duo, ad easdem partes, vel quatuor, ad omnes partes, ex duarum rectarum linearum inclinatione procreati, æquales fuerint: tum semper esse rectos. Nec posse duas rectas lineas quæ inclinando se invicem contin-

gunt, æquales angulos, ſingulos, ſingulis, efficere, niſi anguli illi ſint recti. Non tamen omnes propterea anguli æquales, ſunt recti. Quando enim linea lineam ſecat, qui ad verticem ſunt anguli, ſemper invicem ſunt æquales, & tamen, & acuti eſſe poſſunt, & obtuſi, ut ex XV. Propoſitione I. Elem. liquet.

Quod vero Pappus & ex eo Proclus demonſtrare conantur, eſſe quosdam angulos rectis æquales, nec tamen rectos, id non video quomodo ex appoſita eorum demonſtratione ſequatur. Verba Procli ſunt. Ὁ δὲ Πάππος ἐπέστησεν ἡμᾶς ὀρθῶς, ὅτι τὸ ἀντίστροφον οὐκέτι ἀληθὲς τὸ τὴν ἴσην τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ ἐκ παντὸς εἶναι ὀρθήν. Ἀλλ' εἰ μὲν εὐθύγραμμος εἴη πάντως ὀρθὴν εἶναι. δύνασθαι δὲ καὶ περιφερόγραμμον γωνίαν ἴσην ὀρθῇ δειχθῆναι. Καὶ δῆλον ὡς οὐκέτι τὴν τοιαύτην ὀρθὴν εἶναι δύνασθαι προσαγορεύσομεν. Κατὰ γὰρ τὴν τῶν εὐθυγράμμων γωνιῶν τομὴν, τὴν ὀρθὴν ἐλαμβάνομεν, ὑφιστάντες αὐτὴν ὑπὸ εὐθείας ὑφεστώσης ἀκλινῶς πρὸς τὴν ὑποκειμένην, ὥστε ἡ ἴση τῇ ὀρθῇ οὐ πάντως (ἴση τῇ ὀρθῇ) legendum ὀρθὴ ἐστιν, εἴπερ μὴδὲ εὐθύγραμμος. Νενοήσθωσαν ἤδε εὐθεῖαι δύο ἴσαι αἱ AB. BΓ. ποιοῦσαι τὴν πρὸς τῷ B ὀρθήν. Καὶ ἔστωσαν ἴσαι, καὶ ἐπ' αὐτῶν ἡμικυκλία κέντρῳ καὶ διαστήματι γραφέντα τὰ AEB BZΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴσα τὰ ἡμικυκλία, ἐφαρμόζει ἀλλήλοις, καὶ ἴση ἡ ὑπὸ EBA γωνία τῇ ὑπὸ ZBΓ. Κοινὴ προσκείσθω, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ὑπὸ ABZ. Ὅλη ἄρα ἡ ὀρθὴ ἴση ἐστὶ τῇ μηνοειδεῖ τῇ ὑπὸ EBZ. Καὶ

ὅμως οὐκ ἐστιν ἡ μηνοειδὴς ὀρθή. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀμβλείας οὔσης ἢ ὀξείας τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. δειχθήσεται αὐτῇ ἴση μηνοειδής. Τοῦτο γὰρ ἐστὶ τὸ εἶδος τῶν περιφερογράμμων γωνιῶν τὸ συμβιβαζόμενον τοῖς εὐθυγράμμοις. Πλὴν τόγε τοσοῦτον ἰστέον, ἐπὶ μὲν τῆς ὀρθῆς καὶ τῆς ἀμβλείας προσθεῖναι δεῖ τὴν μεταξὺ γωνίαν τῆς ΑΒ εὐθείας καὶ ΒΖ περιφερείας. Ἐπὶ δὲ τῆς ὀξείας ἀφελεῖν. Ἡ γὰρ ΑΒ. εὐθεῖα τέμνει τὴν ΒΖ περιφερεῖαν. *Pappus vero recte docuit quod conversum hujus verum non sit. Nempe angulum recto æqualem, etiam semper esse rectum. Sed si quidem rectilineus fuerit, omnino rectũ esse. Posse autem & angulum peripheriis circuli comprehensum demonstrari æqualem angulo recto. Et tamen clarum est, hunc rectum dici non posse. In divisione quidem rectilineorum angulorum, rectum eum esse diximus qui fit quando recta linea alteri rectæ supponitur, quæ quidem priori rectæ sine omni inclinatione insistit. Adeoq; qui recto est æqualis, non semper rectus est, nisi etiam fuerit rectilineus. Concipiantur vero duæ rectæ lineæ* AB. BΓ. *comprehendentes rectum angulum ad* B. *sint lineæ hæ æquales. Super ipsis autem, centris & intervallis convenientibus, describantur duo semicirculi* AEB & BZΓ. *Quoniam igitur semicirculi conveniunt invicem, ergo & angulus* EBA *æqualis erit angulo* ZBΓ. *Apponatur communis & residuus*, ABZ. *Totus ergo rectus angulus æqualis angulo Lunæformi, qui comprehenditur sub* EBZ. *Et tamen angulus hic Lu-*

næformis non eſt rectus. Eodem modo ſi angulus ABΓ *ponatur vel obtuſus, vel acutus, demonſtratur angulus Lunæformis huic eſſe æqualis. Hæc enim ſpecies angulorum peripheriis comprehenſorum, confertur cum rectilineis. Id vero præterea ſciendum eſt, quod cum angulus* ABΓ, *rectus fuerit, aut obtuſus: tum angulum comprehenſum recta* AB *& Peripheria* BZ *debere apponi; quando vero acutus fuerit, aufertur angulus prædictus. Recta enim* AB *ſecat tum Peripheriam* BZ. Verum in hoc quidem argumento plus videtur eſſe in concluſione, quam fuit in præmiſſis. Sit enim diagramma juxta rationem Pappi vel Procli exſtructum n. XII. Atque in eo ſit angulus BZΓ. rectus, latera autem AB & BΓ æqualia: ſuper his autem exſtructi ſemicirculi AEB BZΓ, manifeſtum quidem eſt: angulos ABE & ΓEZ eſſe æquales. Quod vero angulus ABZ reliqvus, junctus communi EBZ, ſit æqualis recto ABΓ; vel ſolus, ZBE Lunæformis, æqualis ſit recto ABG: id vero minime liquet. Contrarium potius hinc ſequitur. Angulus enim ABΓ excedit angulum Lunæformem binis angulis miſtis ABZ nempe, & ΓBE; ideoque ſi angulus ABΓ debet æquari angulo ZBE, debent prius hi duo anguli auferri. Angulus ergo Lunæformis ſeu ex duobus circuli peripheriis compoſitus, eſt minor angulo recto, & non æqualis. Quod autem diagramma hoc modo ordinari debeat, ex ſequentibus liquet. Ait enim ſi angulus ABΓ ponatur acutus, tum rectam AB ſecare peripheriam: in obtuſo autem, vel recto, non item

tem, ideoque angulum comprehenſum AB recta & BZ peripheria heic addi debere, illic vero auferri. Quod quidem in hoc diagrammate contingere videmus. In acuto enim angulo LBK, recta KB ſecat peripheriam BMI. In angulo autem recto AEΓ, aut obtuſo HBN, id non contingit. Sed tamen veritas rei nihilo propter hoc clarior. Suſpicabar mendum heic latere, vel aliquid deeſſe. Verum quocunque modo locus vel emendetur, vel reſtituatur, vix quicquam proficere poſſumus, cum ipſa aſſertio perquã ſit dubia. Id enim certum eſt, angulum peripheriarum, a rectilineo comprehenſum, multo minorem eſſe ipſo rectilineo. Quicquid ſit, de eo nunc multis inquirere animus nobis non eſt, cum certum ſit, Definitionem Geometricam eſſe certiſſimam, quæ omnes angulos rectilineos, non rectos, vel minores facit rectis, vel majores.

CAP. XXI.

Alterum poſtulatum majori videtur indigere demonſtratione, ideoque à Ptolemæo ſicut aliud quoddam Theorema diducte fuit demonſtratum. Liquet hoc ex Proclo qui Ptolemæi Propoſitionem modumque demonſtrandi totidem verbis recenſet, quæ eo libentius heic adponam, quod ipſius Ptolemæi ſcriptum hac de re nuſquam reperiatur. Ita vero Proclus libro IV. in I. Elem. Euclidis. in Propoſit. XXIX.
Ἤδη μὲν οὖν καὶ ἄλλοι τινὲς ὡς θεώρημα παρὰ τῷ στοιχειωτῇ ληφ-

θὲν ἀποδείξεται ἠξίωσαν. Δοκεῖ δὲ καὶ ὁ Πτολεμαῖος αὐτὸ δεικνῦναι ἐν τῷ περὶ τοῦ τὰς ἀπ᾽ ἐλαττόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλομένας συμπίπτειν. καὶ δείκνυσι πολλὰ προλαβὼν τῶν μεχρὶ τοῦδε τοῦ θεωρήματος ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ προαποδεδειγμένων. Καὶ ὑποκείσθω πάντα εἶναι ἀληθῆ ἵνα μὴ καὶ ὑμεῖς ὄχλον ἐπεισάγωμεν ἄλλον, καὶ ὡς λημμάτιον τοῦτο δείκνυσθαι διὰ τῶν προειρημένων. Ἓν δὲ καὶ τοῦτο τῶν προδεδειγμένων, τὸ τὰς ἀπὸ δυοῖν ὀρθαῖς ἴσων ἐκβαλλομένας μηδαμῶς συμπίπτειν. λέγω τοίνυν ὅτι καὶ τὸ ἀνάπαλιν ἀληθές, καὶ τὸ, παραλλήλων οὐσῶν τῶν εὐθειῶν καὶ τεμνομένων ὑπὸ μιᾶς εὐθείας τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθοῖς ἴσα εἶναι. Ἀναγκὴ γὰρ τὴν τέμνουσαν τὰς παραλλήλους ἢ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ἢ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. Ἔστωσαν οὖν παράλληλοι, αἱ αβ. γδ. καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ εζ. λέγω ὅτι οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν μείζους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά. Εἰ γὰρ αἱ ὑπὸ αζη. γηζ. δύο ὀρθῶν μείζους, αἱ λοιπαὶ αἱ ὑπὸ βζη δηζ δυὸ ὀρθῶν ἐλάσσους. Ἀλλὰ καὶ δυὸ ὀρθῶν μείζους αἱ αὐταί. Οὐδὲν γὰρ μᾶλλον αἱ αζ, γη παράλληλοι, ἢ αἱ ηδ. ζβ. ὥστε εἰ ἡ ἐμπεσοῦσα εἰς τὰς αζ γη δυὸ ὀρθῶν μείζους ποιεῖ τὰς ἐντὸς, καὶ ἡ εἰς τὰς ζβ. ηδ ἐμπίπτουσα δυὸ ὀρθῶν ποιήσει μείζους τὰς ἐντὸς. Ἀλλ᾽ αἱ αὐταὶ καὶ δυὸ ὀρθῶν ἐλάσσους. Αἱ γὰρ τέσσαρες αἱ ὑπὸ αζη. γηζ. βζη. δηζ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι εἰς τὰς παραλλή-

λους

λους ἐμπίπτουσα, οὐ ποιεῖ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. Εἰ δὲ μήτε μείζους, μήτε ἐλάσσους ποιεῖ τῶν δύο ὀρθῶν, λείπεται, τὴν ἐμπίπτουσαν δύο ὀρθαῖς, ἴσας ποιεῖν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας. Τούτου δὴ προδεδειγμένου τὸ προκείμενον ἀναμφισβήτως ἀποδείκνυται. Λέγω γὰρ ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιεῖ, συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. Μὴ γὰρ συμπιπτέτωσαν, ἀλλ' εἰ ἀσύμπτωτοι εἰσὶν ἐφ' ἃ μέρη αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, πόλλῳ μᾶλλον ἔσονται ἀσύμπτωτοι ἐπὶ θάτερα, ἐφ' ἃ τῶν δύο εἰσὶν ὀρθῶν αἱ μείζονες, ὥστε ἐφ' ἑκάτερα ἂν εἶεν ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι, εἰς τοῦτο παράλληλοι εἰσὶν. Ἀλλὰ δέδεικται ὅτι ἡ εἰς τὰς παραλλήλους ἐμπίπτουσα, τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει γωνίας. Αἱ αὐταὶ ἄρα καὶ δύο ὀρθαῖς ἴσαι, καὶ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἀδύνατον. Quæ ita verto & ut rectius intelligatur diagramma XII. considerari jubeo. *Jam vero & illud quod Euclides assumpsit, alii quidam ut theorema demonstrare sunt conati; atque inter hos Ptolemæus in libro, quo probavit rectas, a minoribus angulis, quam duo recti, productas concurrere. Hoc vero demonstrat, multis antea suppositis, quæ Euclides demonstravit, quorum fidem neque nos elevare volumus, ne turbas excitemus, sed permittemus hoc ut Lemma aliquod ex præcedentibus probari. Unum vero in-*

inter hæc demonſtrata, eſt, Rectas, quæ à binis angulis, æqualibus totidem rectis, educuntur nusquam concurrere. Cujus converſum & verum eſſe dico, nempe ſi recta ſecuerit duas parallelas tum internos angulos, ad easdem partes, duobus rectis eſſe æquales. Neceſſarium enim eſt eam quæ parallelas ſecat, angulos internos & ad easdem partes, vel minores facere duobus rectis, (vel majores) vel æquales. Sint parallelæ lineæ αβ γδ. *incidat vero in has* εζ. *dico quod non faciat internos angulos majores duobus rectis. Si enim* αζη γηζ *duobus rectis ſunt majores, reliqui anguli nempe* βεη & δηζ *duobus rectis erunt minores. Sed iidem & duobus rectis ſunt majores. Non enim* αζ γη *magis ſunt parallelæ quam* ηδ εβ. *ut propterea ſi illa quæ in* αζ γη *incidit rectas, binos internos & ad eadem partes angulos faciat duobus rectis majores: etiam illa quæ in* εβ ηδ *incidit, internos & ad easdem partes angulos, duobus rectis majores faciet. Sunt vero iidem anguli & duobus rectis minores. Quatuor enim anguli* αζη γηζ βζη δηζ *quatuor rectis æquales. Eſt vero hoc abſurdum. Eodẽ modo demonſtrabimus quod quæ in duas rectas incidat, internos & ad easdem partes angulos non faciat, duobus rectis minores. Si vero neque majores ſunt, neque minores duobus rectis, ſequitur utique eam quæ duabus rectis incidit internos & ad easdem partes angulos efficere duobus rectis æquales. Hoc vero demonſtrato ſine omni controverſia verũ id eſſe deprehenditur, quod nunc præ manibus habemus. Dico enim ſi in duas rectas recta inci-*

incidens internos & ad easdem partes angulos minores fecerit duobus rectis, concurrent rectæ illæ eductæ verſus eas partes ubi ſunt duo anguli duobus rectis minores. Si enim verſus eas partes non concurrunt, ubi ſunt anguli duobus rectis minores, multo minus concurrent verſus alteram partem, ubi ſunt bini anguli binis rectis majores, ita ut verſus neutram partem concurrant, ideoque ſint parallelæ. Sed demonſtratum eſt, eam quæ in parallelas incidit, internos & ad easdem partes angulos, æquales facere duobus rectis. Iidem ergo anguli & binis rectis æquales ſunt, & duobus rectis minores: quod eſt impoſſibile. Hactenus quidem Ptolemæus demonſtravit, ſi in rectas lineas recta incidens angulos fecerit duobus rectis minores, tum rectas illas concurrere. Id vero fieri verſus illas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores, poſtea hoc modo probat.

Ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ. καὶ ἐμπίπτουσα εἰς αὐτὰς ἡ εζηθ ποιείτω τὰς ὑπὸ αζη καὶ ὑπὸ γηζ δύο ὀρθῶν ἐλάσσους. Ὅτι μὲν οὖν οὐκ ἀσύμπτωτοι αἱ εὐθεῖαι δέδεικται. Εἰ δὲ συμπίπτουσιν ἤ, ἐπὶ τὰ αγ συμπεσοῦνται, ἢ ἐπὶ τα βδ. Συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ βδ κατὰ τὸ κ. Ἐπεὶ οὖν αἱ μὲν ὑπὸ αζη καὶ γηζ δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσους, αἱ δὲ ὑπὸ αζη βζη δύο ὀρθαῖς ἴσαι, κοινῆς ἀφαρεθείσης τῆς ὑπὸ αζη, ἡ ὑπὸ γηζ ἐλάσσων ἔσται τῆς ὑπὸ βζη. Τριγώνου ἄρα τοῦ ηζκ ἡ ἐκτὸς τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἐλάσσων, ὄπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κατὰ ταῦτα συμπίπτουσιν. Ἀλλὰ μὲν συμπίπτουσιν. Κατὰ θάτερα ἄρα ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται, καθʼ ἃ τῶν δύο ὀρθῶν εἰσὶν ἐλάσσονες.

Sint enim in digrãmate XIII. duæ rectæ αβ. γδ. *in quas incidat recta* εζηθ. *faciens angulos* αζη *&* γηζ *minores duobus rectis. Reliqui ergo anguli majores erũt duobus rectis. Demonſtratum vero antea fuit lineas haſce neceſrio concurrere. Quoniam ergo concurrunt, fiet utique illud vel versus* αγ, *vel verſus* βδ. *Concurrant verſus* βδ. *crca* κ. *Quoniam ergo* αζη. *&* γηζ *duobus rectis ſunt minores, anguli autem* αζη βζη *æquales duobus rectis, aempto communi, erit* γηζ *minor quam* ηβκ. *In triangulo ergo* κζκ *angulus externus interno & oppoſito minor erit: quod eſt abſurdum. Non ergo verſus haſce partes concurrent. At concurrunt tamen. Fit ergo illud verſus alias partes, ubi anguli ſunt duobus rectis minores.* Et tali quidem modo Ptolemæus hæc demonſtrare fuit conatus. Nec tamen ejus demonſtratio Proclo placuit. Id enim aſſumere videtur quod adverſarius non tam facile ſine demonſtratione concedet. Quod enim in prima demonſtratione ait *Si* αζη γηζ *duobus rectis ſunt majores, ergo* βζη δηζ *duobus rectis erunt minores* id facile concedet adverſarius. Neque tamen ideo hanc conſequentiam admittet, quod βζη δηζ ſint etiam majores duobus rectis. Id enim per ſe evidens non eſt. Adeoque neque abſurdum illud ex hypotheſi adverſarii colligitur, quod inde deducere vult Ptolemæus, ſuaque hoc modo demonſtrare. Aliam etgo viam Proclus eſt ingreſſus. Et primo quidem Axiomatis loco ſupponit. *Si duæ rectæ angulum ab una parte facientes, ab altera parte in infinitum producantur, tum*

quas-

quascunque magnitudines finitas comprehendere posse. Inde demonstrat *quæ unam parallelarum secat recta linea, etiam alteram parallelarum secare.* Demum Postulatum hoc Euclideum aggreditur. Sed ipsum Proclum loquentem audiamus. Πρὸς δὲ τὸν τοῦτο ἐπιζητοῦντα κατασκευαζόμενον ἰδεῖν, λεγέσθω παρ' ὑμῶν ὅτι δεῖ προλαβεῖν ἀξίωμα τοιοῦτον ᾧ καὶ Ἀριστοτέλης ἐχρήσατο, κατασκευάζων πεπερασμένον εἶναι τὸν κόσμον. Ἐὰν ἀφ' ἑνὸς σημείου δύο ἐκβάλλονται εὐθεῖαι γωνίαν ποιοῦσαι ἐπ' ἄπειρον, πᾶν πεπερασμένον μέγεθος ὑπερβάλλει ἡ διάστασις αὐτῶν τῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλομένων. Ἔδειξε γοῦν ἐκεῖνος ὅτι ἀπειρῶν οὐσῶν τῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν περιφέρειαν ἐκβεβλημένων, ἄπειρον τὸ μεταξύ. Πεπερασμένου γὰρ ὄντος, αὐξῆσαι τὴν διάστασιν ἀδύνατον. ὥστε οὐκ ἄπειροι αἱ εὐθεῖαι. Παντὸς οὖν τοῦ ληφθέντος πεπερασμένου μεγέθους μεῖζον ἀλλήλων διαστήσονται ἐκβαλλόμεναι ἐπ' ἄπειρον αἱ εὐθεῖαι. Τούτου δὴ προϋποθέντος, λέγω, ὅτι ἐὰν παραλλήλων εὐθειῶν τὴν ἑτέραν τὶς εὐθεῖαν τέμνη, τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. Ἔστωσαν γὰρ παράλληλοι αἱ αβ γδ, καὶ τεμνέτω τὴν αβ ἡ εζκ· λέγω ὅτι τὴν γδ τεμεῖ. Ἐπεὶ γὰρ δύο εὐθεῖαι εἰσὶν ἀφ' ἑνὸς σημείου τοῦ ζ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι αἱ βζ ζη. παντὸς μεγέθους μείζονα ἕχουσι διάστασιν. ὥστε καὶ τούτου ὅσον ἐστὶ τὸ μεταξὺ τῶν παραλλήλων. ὅτ' ἂν οὖν μεῖζον ἀλλήλων διεστῶσιν, τῆς τούτων διαστάσεως, τεμεῖ ἡ ζη τὴν γδ. Ἐὰν ἄρα παραλλήλων τὴν ἑτέραν τέμνη τὶς εὐθεῖα,

τεμεῖ καὶ τὴν λοιπήν. Τούτου προαποδειχθέντος ἀκολούθως δείξομεν τὸ προκείμενον. Ἔστωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι αἱ αβ γδ καὶ ἐμπιπτέτω εἰς αὐτὰς ἡ αζ. ἐλάσσονας δυὸ ὀρθῶν ποιοῦσα τὰς ὑπὸ βεζ δεζ. λέγω ὅτι συμπεσοῦνται αἱ εὐθεῖαι κατὰ ταῦτα τὰ μέρη, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο εὐθειῶν εἰσὶν ἐλάσσους. Ἐπειδὴ γὰρ αἱ ὑπὸ θεζ δζε ἐλάσσους εἰσὶν δύο ὀρθῶν τῇ ὑπεροχῇ τῶν δύο ὀρθῶν, ἔστω ἴση ἡ ὑπὸ θεβ καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ θε ἐπὶ τὸ κ. Ἐπεὶ οὖν εἰς τὰς κβ γζ ἐμπέπτωκεν ἡ εζ, καὶ ποιεῖ τὰς ἐντὸς δύο ὀρθαῖς ἴσας τὰς ὑπὸ θεκ, δζε, παράλληλοι εἰσὶν αἱ θκ γδ εὐθεῖαι· καὶ τέμνει τὴν κθ ἡ αβ. τεμεῖ ἄρα καὶ τὴν γδ διὰ τὸ προδεδειγμένον. Συμπεσοῦνται ἄρα αἱ αβ γδ κατὰ μέρη ἐκεῖνα, ἐφ' ἃ αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὥστε δέδεικται τὸ προκείμενον. *Illi vero qui hæc accuratius ſcire diſcupit, hæc dicimus, quod neceſſarium ſit illud Axioma ſupponere, quo Ariſtoteles etiam uſus eſt, cum demonſtrare vellet mundum eſſe finitum. Si ab uno ſigno duæ rectæ lineæ in infinitum educantur, quæ angulum faciunt, earum diſtantia, cum in infinitum producuntur, quamcunque finitam magnitudinem excedet. Et demonſtratum quidem eſt Ariſtoteli, ſi infinitæ fuerint rectæ quæ à circulo ad peripheriam ducuntur, tum etiam intervallum rectarum infinitum eſſe. Finiti enim intervallum augere, eſt impoſſibile. Ideoque niſi intervallum infinitum fuerit, neque lineæ infinitæ erunt. Quantacunque ergo ſumatur magnitudo, dummodo finita, intervallum rectarum in infinitum productarum*

illam

illam neceſſario excedit. Hoc autem ſuppoſito, dico ſi recta linea unam rectarum parallelarum ſecuerit etiam alteram ſecabit. Sint enim parallelæ αβ γδ. in figura XII. & ſecet qvidem εζη recta rectam αβ. dico qvod eadem εζη rectam γδ ſecabit. Cum enim duæ rectæ ab eodem puncto ζ producantur in infinitum, rectæ nempe ϵζ & ζη ergo intervallum earum qvacunq; magnitudine aut diſtantia majus erit. Ideoque & diſtantiam parallelarum linearum αβ & γδ exedet Ubi autem intervallum rectarum majus fuerit intervallo parallelarum, ſecabit ζη rectam γδ. Si igitur unam parallelarum recta ſecuerit, etiam alteram ſecabit. Hoc autem antea demonſtrato, conſequenter idipſum demonſtrabimus, quod præ manibus nunc habemus. Sint duæ rectæ αϵ γδ figura XIV. in qvas incidat εζ faciens angulos βεζ δζε duobus rectis minores, dico, qvod rectæ coincidant verſus eas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores. Qvoniam enim ϵεζ δζε minores ſunt duobus rectis, exceſſu illo qvo duo recti hoſce excedunt, conſtituatur angulus θεβ huic exceſſui æqvalis, ejiciaturq; θε in κ. Qvoniam ergo recta εζ in rectas κθ γδ incidens internos angulos duobus rectis æqvales facit, nempe angulos θεζ & δζε, erunt θκ & γδ parallelæ. Secat autem recta αβ rectam κθ ergo & rectam γδ ſecabit, per illud qvod nunc demonſtravimus. Concurrent igitur αβ γδ verſus illas partes, ubi ſunt anguli duobus rectis minores; qvod demonſtrare oportebat.

Atqve in hac qvidem demonſtratione præter Axioma qvod heic adducitur, etiam propoſitionem XXVII lib. I. ſupponit. Cœtera in demonſtratione clara ſunt, nec ullam habent difficultatem. Satis qvidem compertum habeo, ſolere Euclidem, ex antecedentibus, ea qvæ immediate ſeqvuntur demonſtrare, atque hoc modo, Propoſitionem qvæ tradit duos angulos trianguli internos & oppoſitos externo eſſe æqvales, ex antecedente Propoſitione demonſtrari, qvæ qvidem ex eo qvod nunc explicuimus Theoremate dependet. Id qvoqve cognitum mihi eſt, poſſe illam ipſam Propoſitionem longe breviori via expediri, nempe ſi in Propoſitione XVI. demonſtratum fuerit lineas qvæ angulos externos faciunt in directum ſibi jacere: ſicut illud qvoqve alibi à nobis factum eſt. Sed qvandoqvidem Euclidis Propoſitiones eo, qvem ex Proclo laudavimus, modo, ſatis bene nunc demonſtrentur, nolumus Lectorem diutius his detinere. Qvoniam vero omnia Geometriæ principia, quæ ab Euclide I. libro Elementorum ponuntur, vera eſſe ſunt deprehenſa: nunc qvid in ipſis concluſionibus à qvibusdam deſideratum fuit, paucis attingemus.

CAP. XXII.

Diximus antea ubi contra Sextum Empiricum diſputavimus, argumentum qvod contra X. Propoſitionem libri I. Element. proponit, falſa niti hypotheſi, nempe lineas ex punctis componi. Cum ergo huic

huic objechoni alibi satisfactum sit, eo lectorem remittimus. Præter Pyrrhonios autem seu Scepticos, alios quoq; adversarios habuere Geometræ nempe Epicureos, qvi quidem non falsitatis principia Geometrica arguebant, sed potius ut nimis accurate etiam res manifestas demonstrantia irridebant. Nota est Epicureorum vox de Propositione XX. lib. I. Elementor. eam nempe Propositionem adeo per se claram & perspicuam, ut ejus veritas etiam asino constet. Proclus ad hanc Propositionem. Τοῦτο τὸ θεώρημα διασύρειν μὲν εἰώθασιν, οἱ Ἐπικούρειοι καὶ ὄνῳ λέγοντες αὐτὸ δῆλον εἶναι καὶ μηδεμιᾶς δεῖσθαι κατασκευῆς. Ὁμοίως δὲ ἀνεπιστήμονος εἶναι ἔργον τὰ ἐμφανῆ παραμυθίας ἀξιουν, καὶ τοῖς ἀδήλοις, αὐτόθεν πιστεύειν. Ὁ γὰρ ταῦτα συγχέων φανερός ἐστι τό τε ἀναπόδεικτον ἀγνοῶν. Ὅτι δὲ καὶ ὄνῳ τὸ προκείμενον θεώρημα γνώριμον κατασκευάζουσιν ἐκ τοῦ τεθέντος χόρτου κατὰ τὸ ἕτερον πέρας τῶν πλευρῶν, τὸν ὄνον τὴν μίαν ὁδεύειν πλευρὰν, ἀλλὰ μὴ τὰς δύο, τροφῆς ὀρεγόμενον. *Consueverunt qvidem Epicurei hoc Theorema traducere, dicentes asino illud esse cognitum, neq; ulla indigere demonstratione. Eum vero qvi manifesta demonstrare conatur, non minus inscite agere, qvam qvi ignotis sine demonstratione fidem habet. Qvi enim hæc confundit, manifeste deprehenditur ignorare, qvid illud sit, qvod indemonstratum supponere tantum decet. Qvod*

vero

vero præsens negocium etiam asino cognitum sit, inde probant, qvod posito gramine circa unum terminum lateris alicujus, asinus illud tantum latus emetiatur, neqve circumitione gaudeat, duove latera conficiat. Huic vero dubio ita respondit Proclus: Πρὸς δὴ ταῦτα λεκτέον ὅτι σαφὲς μὲν κατὰ τὴν αἴσθησιν ἐστὶ τὸ θεώρημα, οὔπω δὲ σαφὲς κατὰ τὸν ἐπιστημονικὸν λόγον. Πολλὰ γὰρ τοῦτο πέπονθεν τῶν πραγμάτων, οἷον θερμαίνει τὸ πῦρ καὶ τοῦτο τῇ αἰσθήσει σαφές. Ἀλλὰ πῶς θερμαίνει, τῆς ἐπιστήμης ἔργον ἑλεῖν, πότερον, ἀσωμάτῳ δυνάμει ἢ σωματικαῖς τομαῖς, σφαιρικοῖς μορίοις ἢ πυραμοειδέσι. Πάλιν ὅτι κινούμεθα τῇ αἰσθήσει δῆλον, πῶς δὲ κινούμεθα παραστῆσαι τῷ λόγῳ χαλεπὸν, κατὰ ἀμερὲς ἢ κατὰ διάστημα, πῶς δὲ ἄπειρα δίιμεν, εἰς ἄπειρον γὰρ διαιρετὸν πᾶν μέγεθος. Ἔστω τοίνυν καὶ τὸ τριγώνου τὸ μείζους εἶναι τὰς δύο, τῆς μιᾶς, τῇ αἰσθήσει καταφανὲς, ἀλλὰ πῶς τοῦτο γίνεται τῆς ἐπιστήμης ἔργον εἰπεῖν. *Ad hæc vero dicendum est qvod Theorema hoc sensibus qvidem manifeste verum deprehendatur, non vero juxta rationem scientificam. Atq; id qvidem multis in rebus contingit Ignem enim calefacere, sensibus qvidem manifestum est. qvomodo autem calefaciat, id scientia discernere debet, utrum virtute incorporali, aut corporalibus sectionibus, iisq; vel Sphæricis vel Pyramidalibus. Rursum, qvod moveamur manifestum est, qvomodo vero moveamur etiam rationi exhibere est per qvam difficile, utrum secundum*

cundum

cundum indivisibile, aut secundum intervalla. qvo item modo infinita transeamus. omnis enim magnitudo in infinitum dividitur. Qvamvis ergo sensibus sit manifestum, duo trianguli latera majora esse tertio; tamen qvomodo id fiat, sola scientia dicere potest. Et sane non sine causa heic qværi posset, qvî fiat? qvod in triangulis rectilineis duo latera semper sint majora reliqvo, cum in aliis triangulis id verum absolute non sit. Potest enim dari triangulum mistum, constans nempe binis lateribus rectilineis & una portione peripheriæ circuli, in qvo, unum hoc latus majus erit duobus reliqvis Si enim latera rectilinea fuerint circuli radii, angulus autem his comprehensus major. 115. gradibus: dico arcum circuli 115. gr. hoc est, tertium latus hujus trianguli, omnesq; adeo arcus hoc majores, usq; ad semicirculum, qvamdiu angulus ullus concipi potest, majores esse binis radiis: adeoq;, in omnibus hisce casibus, duo latera trianguli minora tertio. Bini enim radii æqvantur integræ diametro. Diameter autem circuli se habet ad peripheriam ut 22. ad 7. juxta rationem Archimedeam, adeoq; Hemiperipheria ad diametrum, ut 11. ad 7. Septem ergo undecimæ partes semicircumferentiæ æqvantur ipsi diametro, adeoq; binis radiis. At si circumferentia dimidia in 11. partes secetur, cuivis parti convenient grad. 16. 21'. 49''. $\frac{11}{1}$. adeoq; septem undecimæ sunt 114. 32'. 43''. $\frac{11}{7}$. æqvales integræ diametro, & per consequens binis radiis, qvi sunt latera tranguli mixti. Duo ergo latera

in illo qvidem triangulo, ſunt æqualia tertio: ubi vero ulterius ventum fuerit ad 115. gradus & ultra, duo latera ſunt minora tertio. Quod ſi Archimedea ratio non placuerit, qvæ tamen ſatis clare demonſtrat, id qvod nos ſupponimus: poteſt ex ſubtiliſſima & omnium accuratiſſima ratione Ludolphi van Ceulen computus deduci, & veritas hujus problematis non minus conſtabit. Propter has ergo cauſas neceſſarium erat demonſtrare Propoſitionem XX. lib. I. Elementorum, ut conſtaret, id qvod in miſtis triangulis verum abſolute non eſt, in rectilineis verum eſſe. Et ſane multa ſunt quæ ſenſibus aliter apparent, quam intellectus & ratio ea revera eſſe demonſtrat Epicurei ſolem bipedalem pronunciabant, quod talis appareret. Non ignoro inſignem Philoſopum fuiſſe Epicurum & naturalis ſcientiæ perqvã peritum, ideoq; necGeometriæ rudem fuiſſe arbitror, qvamvis illud de ipſo affirmare videatur, vel ſaltem indicareSextusEmpiricus.Inter aſſeclas tamen hujus, vel illos ſaltem, qvi nomine tenus Philoſophi Epicurei erant, multi rudes atq; indocti reperiebantur, quorum& hanc fuiſſe objectionem arbitror, ut & quædã cœterorũ abſurdorũ, qvæ Epicureis tribuuntur. Nam longe rectius in qvibusdã ſapuiſſe Epicurum lemmata ipſius quæ apud veteres habemus quæq; magna diligentia, inſignis ille Philoſophus & Mathematicus Petrus Gaſſendus collegit, abunde commonſtrant. Sed ut ad argumentum revertar, dico multa ſenſibus aliter apparere quã reve-

reverà ſunt, ut Sol bipedalis, ſtellæ vix unciales, quæ tamen ratio demonſtrat longe majora eſſe. Principia ergo ſapientiæ non ea ſunt quæ ſolis ſenſibus vera deprehenduntur, ſed quæ ratio vera eſſe judicat atq; ab errore libera. Ita ergo demonſtratum eſt non debere Geometras male audire quod res ſenſibus claras rationibus firment, cum non ea omnia vera ſint, quæ ſenſibus vera apparent, ſed quæ intellectu & ratione vera eſſe deprehenduntur. Et tantum quidem contra Epicureos. Reſtat quidem alia adhuc objectio, quorundam veterum qvi negabant, duas rectas non concurrere in infinitum eductas. Argumentum eſt apud Proclum lib. IV. ad propoſ. XXIX. nec demonſtratio abſimilis ei quæ eſt ad figuram no. 111. noſtram. Verum illa id tantum concludit duas lineas non concurrere in linea, ſed in puncto: quod & verum eſt. Nam ſimpliciter dicere quod non concurrant, id & ſenſibus, & aliis demonſtrationibus eſt contrarium, præcipue illi quam ex Proclo ultimo loco attulimus. Atq; ita omnia illa, quæ alicujus momenti vel ab aliis primo Euclidis libro Element. oppoſita fuere, vel jure opponi poſſunt, ea qva fieri potuit brevitate expoſuimus; unaq; demonſtravimus, principia Geometriæ in omnibus clara certa ac perſpicua eſſe. Præcipue vero Geometricas veritates à falſitatibus Sexti Empirici vindicavimus, rati gratam hac in parte nos operam præſtituros iis, qvi gravioribus occupati, calumnias iſtius viri reijcere & falſitatis convince-

re neqveunt. Ipſum quoq; Euclidem vera per omnia tradidiſſe demonſtravimus, quamvis alicubi non ſatis commode egerit, atq; ea pro demonſtratis ſuppoſuerit, quæ vera quidem ſunt, ſine demonſtratione tamen vera eſſe non intelliguntur: quæ ideo nos ex antiqvorum mente demonſtravimus, eorumq; παρωράματα indicavimus, non ut opprobrio afficiantur, ſed ut alii ſimiles ſcopulos caveant. Qvoniam vero nihil præterea in prioribus libris Euclidis compertum habeam, quod falſitatis, à qvoquam ſit accuſatum, aut jure accuſari poſſit, ad quintum librum Elementorum pedem promovebo, in quo aliquot propoſitiones duas imprimis VIII. & X impugnandas ſuſcepit Meibomius, idq; non quod minus accuratè eſſent demonſtratæ, ſed quod falſa niterentur difinitione, ea nempe quæ eſt libr. V. ſeptima. Hujus ergo viri argumenta primum examinabimus, totamq; illam rationem breviſſima via percurremus. Inde ad aliud caput accuſationis Meibomianæ perveniemus, in quo alios Geometras ac nominatim Theonem Alexandrinum & Eutocium Aſcolonitam, & recentiores ignorantiæ accuſat, quodq; veteres Geometras non intellexerint. Equidem non me fugit, multa à Petro Ramo viro doctiſſimo atq; inſigni Geometra contra methodum Euclideam fuiſſe propoſita: quæ tamen ideo tacitus prætereo, quod illud vitium, non ipſas veritates concernat, nec tam Geometricum ſit, qvam Logicum

gicum. Fuere alii qvi de natura demonſtrationum Mathematicarum, varia diſputarunt; quibus egregiè ſatisfecit Franciſcus Barocius patritius Venetus in celeberrima Patavienſi Academia Mathematum Profeſſor Publcus, qvi in illa Oratione, qvam publice habuit, tum cum primum Mathemata profiteri inciperet, variis argumentis tam ex auctoritate, qvam ex ſolida ratione petitis, pererudite ac ſolide comprobavit demonſtrationes Mathematicas non modo vere & proprie demonſtrationes appellari, ſecus qvam aliqvi ſentirent, ſed & omnium primas eſſe ac certiſſimas. Qvi ergo hæc plenius cognita habere cupit illum adeat. Neq; enim his diutius immorari libet, cum ipſa prima principia totaq; Geometrica materia à cavillis malevolorum ſatis ſit vindicata. His igitur in Dei nomine primum librum finiamus, ac ſeqventis initium faciamus.



WILHELMI LANGI DE VERITATIBUS GEOMETRICIS.

LIBER II.

CAPUT I.

CUm ſuperiori libro ea omnia explicata ſint, quæ ab aliis contra veritates Geometricas, primo Elementorum Euclidis libro contentas mota fuere; eaq; una demonſtrata, quæ in dubium jure vocari poſſunt, nec tamen ab Euclide ulla probatione ſunt confirmata, ſed ut vera & per ſe clara, ab ipſo aſſumpta: hoc ſequenti libro ea nobis pertractare animus eſt, quæ ad confutationem eorum ſpectant, quæ Marcus Meibomius, in dialogo de proportionibus, & contra Euclidem, & contra alios veteres novosq; Geometras falſa in medium adduxit. Equidem ſi Meibomius ex eo capite accuſationem ſuam contra Euclidem fuiſſet exorſus, quo P. Ramus uſus eſt, nempe multa ſcitu neceſſaria Euclidem omiſiſſe, atq; ea quæ habet, ſatis confuſe tradidiſſe,

nec

nec omnia demonſtraſſe quæ demonſtrari debebant, ſed multa pro veris ſuppoſuiſſe, quæ vera quidem ſunt, à Geometra autem ſupponi non debent ſine demonſtratione: facile qvidem & me, & alios ſibi habuiſſet ὁμοψήφους. Nunc vero quoniam his omnibus omiſſis, falſa ſe heic inveniſſe dicat, ipſaq; principia libri V. Elementorum convellere & labefactare conetur, quæ tamen longe ſunt veriſſima, ut in ſeqventibus patebit, operæ precium me facturum arbitrabar, ſi & ipſius Euclidis ſententiam totamq; illam doctrinam, qua maxime fieri poſſet brevitate explicarem, & veritate harum rerum demonſtrata, fontes erroris Meibomiani detegerem, ipſiusq; argumenta refellerem. Quoniam vero hæc doctrina, quæ eſt de majore aut minore ratione, accurate demonſtrari aut intelligi non poſſit, niſi altera illa quæ eſt de rationum compoſitione huic adjungatur; quam quidem Meibomius Euclidem aliosq; veterum intellexiſſe & bene etiam tradidiſſe ait, poſteriores autem Geometras veterum mentem non cepiſſe, ſed multa perperam innovaſſe; totam hanc rationum & proportionum naturam benevolo lectori ob oculos ponere decrevi, ut & illi, qui in Mathematicis non usq; adeo ſunt verſati, ut penitiora ipſius intelligant, per ſe tamen perſpiciant, quid illud ſit, quod Meibomius contra Euclidem & Geometras ſe inveniſſe gloriatur; ac demum ſciant quam ſolida ac certa ſint Geometriæ principia, & quam male ſibi ipſis conſulant, qui in his diſciplinis proba-

bilita-

bilitatem ponunt, taliaq; admittunt, quæ in utramque partem disputari possunt. Adsis Iesu & faue.

CAP. II.

Quantum Geometræ vocant omne illud quod vel mensura, vel numero, vel pondere comprehenditur; seu quod idem est, vel juxta magnitudinem consideratur, vel juxta multitudinem, vel juxta pondus. Architas Tarentinus perantiqvus & celeberrimus Geometra, Τᾶς ποσότητος inqvit διαφοραὶ τρεῖς. Τὸ μὲν γὰρ αὐτᾶς ἐντὶ ἐν ῥοπᾷ ὡς τὸ τάλαντον. Τὸ δὲ ἐν μεγέθει, ὡς τὸ δίπαχυ. Τὸ δὲ ἐν πλάθει ὡς τὰ δέκα. *Qvantitatis differentiæ tres. Vel enim in pondere consistit, ut talentum: vel in magnitudine, ut bicubitale: vel in multitudine, ut decem.* Hoc vero quantum vel in se consideratur, vel quatenus respectum habet ad aliud. Atq; in se quidem, quatenus certam habet magnitudinem, certove numero aut pondere comprehenditur. In singulis enim quanti speciebus hæc diverso modo considerantur. In magnitudine enim, & figura, ut trangulare, quadratum, pentagonon &c. In multitudine autem seu numero sola ποσότης: In ponderibus vero gravitas, qvorum natura & affectiones in distinctis scientiis explicantur, magnitudinum quidem in Geometricis, Numerorum in Arithmeticis, & ponderum in Staticis, quæ tamen scientiæ plurima communia principia habent, communesq; demonstrati-

ſtrationes & veritates, qvamvis in quibusdam etiam diſſideant.

Inter alia vero quæ communia habent, etiam hoc eſt, quod, cum ejuſdem generis aut ſpeciei quanto ſingula conferri poſſint, magnitudo quidem cum magnitudine, numerus cum numero, & pondus cum pondere: quæ quidem collatio ſeu mutuus reſpectus λόγος Græcis dicitur; Latinis ratio.

In Geometricis autem hanc rationem ita definit Euclides Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. *Ratio eſt, duarum magnitudinum ejuſdem generis, quæcunq; mutua relatio ſecundum qvantitatem.* In Arithmeticis autem ratio erit, quæcunque mutua duorum nunerorum relatio ſecundum quantitatem. Ac deniq; in Staticis ratio erit mutua duorum ponderum habitudo ſecundum quantitatem. Notandum vero eſt in Arithmeticis quemcunq; numerum finitum & terminatum cum quocunq; numero finito & terminato conferri poſſe, ſicut etiam pondera cum ponderibus. In Geometricis autem non quamcunq; magnitudinem cum quacunq; magnitudine poſſe comparari. Neque enim ratio rectæ lineæ ad quadratum dari poteſt. Duo quidem quadrata poſſunt invicem eandem habere rationem, quam linea ad lineam. Neq; tamen ideo ratio lineæ ad quadratum datur. In Arithmeticis autem & Staticis inter quoscunq; numeros datos & inter quæcunq; pondera data, etiam ratio datur.

Omnis autem ratio duobus terminis comprehenditur, prior dicitur: terminus à quo ſeu antecedens; alter terminus ad quem ſeu conſequens. Pro diverſitate autem horum terminorum diverſæ rationes conſtituuntur.

Si enim ambo termini æquales fuerint, oritur ratio æqualitatis. Ut ſi duę lineæ æquales fuerint, vel duo qvadrata, duóve cubi, aut ſolida corpora æqualia. In numeris autem ut 1. ad 1. vel 2. ad 2. 6. ad 6. atque ſic in infinitum. In ponderibus denique talentum Atticum ad talentum Atticum, & mina ad minam, & libra ad libram.

Si autem termini inæquales fuerint, oritur ratio inæqualitatis: eſtq; duplex, exceſſûs, vel defectûs. Etenim vel antecedens terminus major eſt conſequente, adeoque excedit terminum alterum, unde ratio eſt exceſſus. Scholiaſtes Græcus Euclidis vocat λόγον τῆς ὑπεροχῆς rationem exceſſûs, apte admodum ac concinne, quam recentiores quidam majoris inæqualitatis dixere; ſicut alteram huic oppoſitam minoris inæqualitatis, quæ rectius juxta priora ratio defectus dicitur, quando nempe antecedens minus eſt conſequente. Ut ſi quadratum cujus area eſſet cc. pedum quadratorum, conferretur cum quadrato areæ C. pedum quadratorum: ſi prius quadratum eſſet antecedens, & poſterius conſequens: ratio exceſſûs diceretur. Ita in numeris ratio 2. ad 1. eſt ratio exceſſûs ſeu τῆς ὑπεροχῆς, ratio autem 1. ad 2. eſt ra-

tio defectûs. Idipſum in ponderibus liquet. Ratio enim talenti ad minam; libræ, ad unciam eſt exceſſûs: ratio autem minæ ad talentum, vel unciæ ad libram eſt ratio defectûs.

Et in numeris quidem hæc ratio ſemper cognita eſt & effabilis. Semper enim datur exceſſus unius numeri ſuper alium, qui alio numero exprimitur. In magnitudinibus autem ratio illa non ſemper exprimi poteſt. Sic ratio diagonalis quadrati ad latus ejuſdem, eſt ineffabilis. nullo enim numero exprimi poteſt, ut Euclidi eſt demonſtratum Elem. lib. X. propos. CXVIII. quo in libro. duo quidem genera magnitudinum commenſurabilium proponit, unum quod abſolute eſt commenſurabile, cuicunq; datæ magnitudini, adeoq; ratio inter ea ſe habet ut numerus ad numerum. Sic magnitudo 100. pedum magnitudini 10. pedum eſt commenſurabilis, adeoque duæ hæ magnitudines rationem habent effabilem λόγον ῥητὸν ſeu quam 100. ad 10. numerus ad numerum. Alterum eſt potentia commenſurabile: ut diagonalis quadrati ad latus, ſimpliciter qvidem & abſolute loquendo commenſurabilis non eſt; potentia tamen invicem commenſurantur. Quadratum enim deſcriptum ſuper diagonali, eſt duplum quadrati alterius per XLVII. I. Elem. adeoque qvadrata horum ſunt commenſurabilia, & habent ſe ut numerus ad numerum, 2. ad 1. Cœtera vero quæ neque longitudine, neque qvantitate ſunt commenſurabilia, irrationalia dicuntur, qvod ratio

eorum numeris, nullo modo explicari possit. vide V. VI. & VII. propositiones libr. X. Elem. Euclidis, & præcipue X. ubi modus docetur inveniendi magnitudinem datæ magnitudini incommensurabilem, tam magnitudine, quam potentia.

In Geometricis ergo alia ratio est effabilis, alia ineffabilis. Effabilis qvæ certo numero explicatur; ineffabilis, quæ certo numero non explicatur. qvæ quidem omnia ab Euclide demonstrantur libro X. Elem. Propos. V. VI. VII. & VIII. In Arithmeticis autem omnes numeri sunt effabiles. Proclus libro II. comm. in I. Eucl.. Τὸ μὲν γὰρ πάντα λόγον εἶναι ῥητὸν Ἀριθμητικῇ προσήκει μόνον, Γεωμετρίᾳ δὲ οὐδαμῶς. Ἔισι γὰρ ἐν αὐτῇ καὶ ἄρρητοι λόγοι. Τὰ δὲ τῶν συμμέτρων Ἀριθμητικὴ μὲν θεωρεῖ πρώτως, γεωμετρία δὲ δευτέρως, ἐκείνην μιμουμένη. διὸ καὶ τὰ σύμμετρα τούτων ταῦτα ἀφορίζεται ὅσα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὡς τῆς συμμετρίας προηγουμένως ἐν ἀριθμοῖς ὑφισταμένης. Ὅπου γὰρ ἀριθμὸς ἐκεῖ καὶ τὸ σύμμετρον. καὶ ὅπου τὸ σύμμετρον, ἐκεῖ καὶ ὁ ἀριθμός. *Nam quod omnes rationes sint effabiles, id soli convenit Arithmeticæ, non vero Geometriæ. Sunt enim in hac etiam ineffabiles rationes.* Et post aliquot verba. *Ea autem quæ sunt commensurabilia inuicem, Arithmetice qvidem primario considerat, Geometria autem secundariò, Arithmeticen imitata. Qvapropter commensurabilia in Geometricis definiuntur, qvæ rationem*

tionem habent invicem qvã numerus ad numerum. Ubi enim numerus illic commensurabile. & ubi commensurabile, illic etiam numerus.

Differunt ergo inter se rationes Geometricæ & Arithmeticæ, quod hæ qvidem omnes accurate explicari possint, illæ vero non item. Nec tamen ideo Arithmeticæ rationes perfectiores Geometricis. Possunt enim in Geometricis qvadrata juxta qvamcunq; rationem dari, duplam, triplam, qvintuplam, imo qvamcunque. In Arithmeticis vero id fieri neqvit. Quadratum enim alterius qvadrati duplum in Arithmeticis non datur.

Quod vero de magnitudinibus verum est, qvasdam inter eas esse incommensurabiles, adeoq; earum rationes inexplicabiles; id etiam in ponderibus locum habet. Possunt enim pondera non minus qvam magnitudines in infinitum secari.

Prima ergo differentia rationum est, qvod respectu terminorum, aliæ sint æqvalitatis, aliæ inæqvalitatis. Secunda, qvod respectu eorundem terminorum, aliæ sint effabiles, aliæ ineffabiles. Prior omnibus rationibus, tam Arithmeticis qvam Geometricis convenit: posterior in Arithmeticis locum non habet; qvod illic omnes rationes sint effabiles.

Porro rationes inæqvalitatis tam excessûs quam defectûs, in Arithmeticis qvidem qvinque species constituunt, qvæ etiam in effabilibus Geometricis eædem sunt. Si enim duo inæqales numeri invicem

conferantur, is qvi major eſt altero, vel totum in ſe comprehendit aliquoties: vel non comprehendit. Si totum in ſe bis, terve, aut pluries continet, major dicitur multiplus, minor vero pars: ut binarius unitatis, & ternarius unitatis, ſenarius binarii. continet enim ſenarius totum binarium in ſe ter. Atq; hoc ipſum in magnitudinibus verum eſt. Si enim magnitudo bis, ter, qvaterve compoſita, aliam magnitudinem fecerit, compoſita magnitudo multiplum dicitur: ea vero ex qua componitur pars. Euclides initio V. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος. *Pars eſt magnitudo magnitudinis minor, majoris, qvando menſurat majus. Multiplum vero eſt majus minoris quando menſuratur à minore.* Menſurare Geometris dicitur qvod multiplicatum alterius qvantitatem exactè æquat, neque majus eſt, neque minus. Sic ulna menſurat longitudinem centum ulnarum. Si enim ulna centies multiplicetur, æquabit longitudinem centum ulnarum. Quod ſi longitudo fuerit centum ulnarum & trium quartarum, tum illa iſtam longitudinem accurate menſurare non poteſt, verum alia tum menſura requiritur, nempe qvarta pars ulnæ. Adeoque ulna quidem propriè atq; accurate loquendo magnitudinis centum ulnarum pars eſt, non vero centum ulnarum & trium qvartarum: cum eam non

meti-

metiatur. Ita qvarternarius ſenarii pars non eſt, cum illum non metiatur. Proprie ergo loquendo, pars eſt, quæ in alio bis aut ſæpius perfecte continetur, ut binarius in qvaternario, ſenario &c. ternarius in ſenario, novenario, & ſic in infinitum. Et is qui alium in ſe continet numerus multiplus dicitur, & quantitas qvæcunque multipla.

Quando ergo antecedens terminus conſequentis multiplus fuerit, ratio dicitur multipla. Theo Smyrnæus libro de muſica cap. XXIII. Πολλαπλάσιος μὲν οὖν ἐστὶ λόγος ὅταν ὁ μείζων ὅρος πλεονάκις ἔχῃ τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὁ μείζων ὅρος καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος ἀπαρτιζόντως ὡς μηδὲν ἔτι λείπεσθαι ἀπ' αὐτοῦ. καὶ κατ' εἶδος τοσαυταπλασίων, ἕκαστος πολλαπλάσιος ὁ μείζων ὅρος λέγεται τοῦ ἐλάττονος ὁσάκις ἂν καταμετρῆται ἀπ' αὐτοῦ, οἷον ἂν μὲν δίς, διπλάσιος, ἂν μὲν τρίς, τριπλάσιος, ἂν μὲν τετράκις, τετραπλάσιος. καὶ κατὰ τὸ ἑξῆς οὕτως. *Eſt itaq; ratio multiplex qvando major terminus pluries continet minorem: id eſt, qvando majorem terminum minor integre metitur, nec ulla pars majoris reſidua ſupereſt. Et juxta eam ſpeciem multiplicationis, unusquisq; major terminus multiplex minoris dicitur, juxta quã à minore menſuratur; ut ſi bis, dupla; ſi ter, tripla, ſi quater, quadrupla, & ſic in ſeqventibus.* Hac ratione magnitudo XII. pedum, dupla quidem eſt ſex pedum: tripla, qvatuor pedum; qvadrupla, trium; ſextupla, duum,

& duodecupla unius pedis. Et hæc prima ſpecies eſt effabilium rationum exceſſûs.

Huic contraria ab altera parte eſt effabilis ratio defectûs, qvæ ſubmultipla dicitur, qvando nempe terminus antecedens eſt pars, conſequens vero multiplex. Ἀνάπαλιν δὲ inquit Theo loco laudato ὁ ἐλάττων τοῦ μείζονος, μέρος ὁμώνυμον τῷ λόγῳ, κατὰ μὲν τὸ διπλάσιον ἥμισυ κατὰ δὲ τὸ τριπλάσιον τριτημόριον. καὶ λόγος ὁ μὲν ἥμισυς, ὁ δὲ τριτημόριος, καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων ὁμοίως. *Inverſo autem modo ſe habet minor ad majorem. Et pars qvidem rationi homonyma eſt. Pars enim dupli vocatur ſemis, tripli vero triens. Illa autem ratio ſubdupla dicitur ſeu dimidia hæc ſubtripla, & ſic in aliis.* Ita ratio duûm ad quatuor eſt ſubdupla: ratio 2. ad 6. ſubtripla: 2. ad 8. ſubqvadrupla: 2. ad 10. ſubquintupla: 2. ad 12. ſubſextupla: 2. ad 14. ſubſeptupla: & ſic in infinitum. Liquet ergo ex his qvid ſit ratio ſubdupla, ſubtripla, ſubquadrupla. nempe qvæ his cyphris indicantur $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ fitq; quando terminus antecedens conſequentis termini, vel dimidius eſt ſeu ſubduplus, vel tertia quartave ejusdem pars.

CAP. III.

Quando autem antecedens terminus, nec pars eſt conſequentis, nec multiplex ejusdem, & tamen eidem inæqualis, alia oritur ratio. Si enim antecedens majus fuerit conſequente, ita tamen ut totum in ſe conſe-

quens

quens aliquoties non contineat, utiq; excedet illud vel una ſui parte, vel pluribus. Si una parte, antecedens vocatur ἐπιμόριος; ſi pluribus partibus, ἐπιμερής. De priori ita Nicomachus Geraſenus Arithmetices libr. I. Ἐπιμόριος δέ ἐστιν ἀριθμὸς τὸ τοῦ μείζονος δεύτερον τῇ φύσει καὶ τῇ τάξει εἶδος, ὁ ἔχων ἐν ἑαυτῷ τὸν συγκρινόμενον ὅλον, καὶ μόριον αὐτοῦ ἕν τι. Ἀλλ' ἐὰν ἥμισυ ᾖ τὸ μόριον, καλεῖται ἡμιόλιος εἰδικῶς ὁ τῶν συγκρινομένων μείζων, ὑφημιόλιος δὲ ὁ ἐλάσσων. Ἐὰν δὲ τρίτον, ἐπίτριτός τε καὶ ὑπεπίτριτος, καὶ ἀεὶ οὕτως, μέχρι παντὸς προχωροῦντι συμφωνήσει σοι. *Numerus autem epimorius (ſeu ſuperparticularis) ſecunda majoris numeri ſpecies eſt, & natura & ordine, qvi quidem in ſe continet correlatum totum & unam ipſius partem. Quæ qvidem pars ſi dimidia fuerit, major collatorum numerorum vocatur ſeſquialter, minor vero ſubſeſqvialter : ſi vero tertia pars; ſeſquitertius & ſubſeſquitertius: atq; ita in perpetuum quoaduſque progrediaris, ſemper tibi convenient.* Ratio ergo inter tales numeros, talesve magnitudines vocatur ἐπιμόριος. Theo Smyrnæus lib. II. cap. 24. Ἐπιμόριος δὲ ἐστὶ λόγος ὅταν ὁ μείζων ὅρος ἅπαξ ἔχῃ τὸν ἐλάττονα καὶ μόριον ἕν τι τοῦ ἐλάττονος, τουτέστιν, ὅταν ὁ μείζων τοῦ ἐλάττονος ταύτην ἔχῃ τὴν ὑπεροχὴν ἥτις τοῦ ἐλάττονος ἀριθμοῦ μέρος ἐστίν, ὡς ἡ τετρὰς τῆς τριάδος. ὑπερέχει γὰρ αὐτῆς μονάδι, ἥτις ἐστὶ τῆς τριάδος τὸ τρίτον. καὶ ἡ ἑξὰς τῆς τετρά-

δος ὑπερέχει δυοῖν, ἄλλα τῶν τεσσάρων ἥμισύ ἐστι. Διὸ καὶ
ἀπὸ τῆς τῶν μερῶν ὀνομασίας ἕκαστος τῶν ἐπιμορίων ἰδίας ἔτυχε προσ-
ηγορίας. Ὁ μὲν γὰρ τῷ ἡμίσει τοῦ ἐλάττονος μέρει ὑπερέχων, ἐφη-
μιόλιος ὠνόμασται, ὡς ἡ τριὰς τῆς δυάδος, καὶ ἡ ἑξὰς τῆς τετρά-
δος. αὐτήν τε γὰρ ὅλην ἔχει τὴν ἐλάττονα καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.
Ἐν μὲν γὰρ τριάδι ἔνεστιν ἡ δυὰς, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἡ μονάς. ἐν δὲ
τῇ ἑξάδι, ἡ τετρὰς, καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἡ δυάς. Πάλιν οἱ τῷ
τρίτῳ μέρει τοῦ ἐλάττονος ὑπερέχοντες, ἐπίτριτοι καλοῦνται ὡς ἡ
τετρὰς τῆς τριάδος. οἱ δὲ τῷ τετάρτῳ ὑπέρεχοντες ἐπιτέταρτοι,
ὡς ὁ ε τῶν πισάρων, καὶ ὁ δέκα τῶν ὀκτὼ, καὶ ὁμοίως προκόπτον-
τες ἐπίπεμπτοί τε καὶ ἔφεκτοι καὶ ἐφέβδομοι ἐκλήθησαν πάντες
οὗτοι ἐπιμόριοι ὄντες· *Ratio ſuperparticularis, eſt quan-
do major terminus minorem ſemel continet & partem in-
ſuper ipſius unam, id eſt qvando major minorem ſupe-
raverit exceſſu aliqvo, qui minoris numeri ſit pars, ve-
luti quaternarius ſuperparticularis eſt ternarii. u-
nitate enim excedit, quæ triens eſt ternarii, & ſenari-
us excedit quaternarium duabus unitatibus, quæ ſunt
ſemis quaternarii. Quare à partium denominatione
ſuperparticulares ſinguli proprias appellationes nan-
ciſcuntur. Qui namq; minorem ſemiſſe ſuperat, ſeſqui-
alter dicitur, ut ternarius binarii : & ſenarius qua-
ternarii. ipſos enim minores totos continent, ipſorumq;
ſemiſſes. In ternario, namq; binarius continetur, &
unitas dimidium ejus. In ſenario quaternarius cum
bina-*

binario ejus semisse. Qui tertiâ rursus parte minorem superant sesquitertii appellantur, ut quaternarius ternarii. Qui quartâ, vocantur sesquiquarti, ut 5. sesquiquartus est numeri 4. & denarius octonarii, & progrediendo pariter, sesquiqvinti, sesquisexti & sesquiseptimi appellati sunt omnes hi superparticulares. Et paulo post. Τῶν δὲ ἐπιμορίων λόγων πρῶτος καὶ μέγιστος, ὁ ἡμιόλιος, ὅτι δὴ καὶ τὸ ἥμισυ μέρος πρῶτον καὶ μέγιστον καὶ ἐγγυτάτω τῷ ὅλῳ. μετὰ δὲ τοῦτον ὁ ἐπίτριτος, καὶ ἑξῆς ὁ ἐπιτέταρτος, καὶ οὕτω πάλιν ἐπ' ἄπειρον ἡ πρόοδος ἀεὶ ἐπ' ἐλάττονος. *Superparticularium verò rationum prima & maxima est sesquialtera, quia pars dimidia prima & maxima est, totiq; proxima. sequitur illam sesqvitertia, deinde sesqviqvarta, idemq; est in infinitum decrescendo progressus.* Quomodo autem ratio sesquialtera major sit ratione sesquitertia, & hæc major qvam sesquiquarta, in sequentibus explicabimus, ubi de majore & minore ratione erit agendum. Nunc tantum illud proponere volumus, qvod ad explicationem rationis ἐπιμορίου pertinet. Si ergo vel magnitudo magnitudinem, vel numerus numerum, vel pondus pondus ita excedat, ut major qvantitas totam minorem in se contineat, & partem præterea ejus qvamcunq; unam, major qvantitas minoris ἐπιμόριος dicitur. Sic magnitudo 100. pedum magnitudinis 99. pedum ἐπιμόριος est, & nu-

merus 100. numeri 99. ἐπιμόριος deniq; pondus 100. librar. ponderis 99. librarum eſt ἐπιμόριον. Pro diverſitate vero partium, diverſitas etiam rationum conſideratur. Etenim ſi magnitudo qvædam aliam magnitudinem totam in ſe contineat, & partem præterea ipſius dimidiam, major magnitudo minoris dicitur ſeſquialtera. Sic magnitudo 150. pedum magnitudinis 100. pedum eſt ſeſquialtera: & magnitudo 30. pedum ſeſquialtera magnitudinis viginti pedum, atq; ſic in infinitum. Atq; hoc ipſum in numeris obtinet. Etenim 150. ad 100. eandem habent rationem qvam 3. ad 2. hoc eſt rationem ſeſqvialteram. Quod etiam in ponderibus eodem plane modo ſe habere deprehenditur. Si vero major terminus minorem terminum totum in ſe contineat & partem præterea ipſius tertiam, major magnitudo minoris ſeſquitertia dicitur, & ratio ipſa ſeſquitertia. Sic ratio 1001. ad 1000. eſt ſeſquimilleſima. continet enim in ſe totum numerum & partem præterea ipſius milleſimam: eodem modo qvo Ciceroni in libro de uniuerſo ſeſquitertia & ſeſquioctava vocatur illa ratio qvæ Platoni in Timæo ἐπίτριτος & ἐπόγδοος dicitur, qua de re in ſequentibus data occaſione plenius agetur. Particula igitur ſeſqvi appoſita indicat magnitudinem alterius magnitudinis eſſe ἐπιμόριον, ſeu ſuperparticularem. Sic enim ratio ſeſquitertia apud Ciceronem eſt $\frac{4}{3}$ ſeu ἐπί-

τριτος

τρίτος Platonis: ratio ſeſqvioctava eſt ἐπόγδοος Platonis ſeu $\frac{9}{8}$. Excedit autem qvaternarius ternarium, una ternarii parte. & novenarius octonarium una parte octonarii. Et ſic 1001. eſt ſeſquimilleſimus 1000. excedit enim 1001. 1000. una parte milleſima Scio alios aliter loqvi & per ſeſquimilleſimum intelligere numerum 1500. Sed qui accurate & cum veteribus, imo cum Cicerone latine loqui & ſcribere velit, eam rationem ſequatur oportet, qvam nunc explicuimus. Id vero heîc una notandum erit, quod in rationibus dignoſcendis, ſemper ſit recurrendum ad minimos & primos nnmeros, qvi Græcis πυθμένες dicuntur. Sic $\frac{3}{2}$ eſt πυθμὴν magnitudinis & rationis ſeſquialteræ, $\frac{4}{3}$ eſt πυθμὴν ſeſquitertiæ, $\frac{5}{4}$ ſeſquiquartæ, & ſic in infinitum, de quibus hoc notat Nicomachus Geraſenus libr. I. Arithmetices Οἱ μὲν πρῶτοι καὶ πυθμένες λεγόμενοι ἐγγύς εἰσιν ἀλλήλων ἐν τῷ φυσικῷ σχήματι, οἱ δὲ δεύτεροι ἀπὸ πυθμένων ἕνα μόνον ἀριθμὸν διαλείπουσιν, οἱ δὲ τρίτοι δύο, οἱ δὲ τέταρτοι τρεῖς, καὶ οἱ πέμπτοι δ΄, καὶ ἀεὶ οὕτως μέχρις οὗ βούλει. Ἔτι γε μὴν τὸ μόριον οὗ παρώνυμός ἐστιν ἕκαστος τῶν ἐπιμορίων, ἐν τοῖς ἥττοσι θεωρεῖται τῶν πυθμένων, ἐν δὲ τοῖς μείζοσι οὐδαμῶς. *Quod* (in ratione ἐπιμορίω,) *primi quidem numeri, & qui* πυθμένες *Græcis dicuntur* (quod ſint inſtar fundi reliquorum) *vicini ſint invicem juxta*

naturalem progressum. Qui vero secundi à πυθμένοις *sunt, uno numero distant; tertii vero duobus: quarti, tribus: & qvinti qvatuor, & sic in perpetuum, qvoad usq; progredi volueris. Præterea pars ista, unde qvævis superparticularium denominationem habet, in minoribus* πυθμένων *seu fundamentalium consideratur, non vero in majoribus.* Πυθμένες ergo, rationis sesquialteræ, sesquitertiæ, sesquiquartæ &c. sunt $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$ & sic in infinitum. His vero proximi numeri sunt $\frac{6}{4}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{10}{8}$, $\frac{12}{10}$. Terti autem sunt $\frac{9}{6}$, $\frac{12}{9}$, $\frac{15}{12}$, $\frac{18}{15}$. Porro quarti sunt $\frac{12}{8}$, $\frac{16}{12}$, $\frac{20}{16}$, &c. Primi autem sunt vicini & connexi. connectuntur enim binarius & ternarius, quaternarius & quinarius, senarius & septenarius immediate. Secundis autem unus numerus interponitur: inter quaternarium enim & senarium est qvinarius, inter 6. & 8. est 7. inter 10. & 12. est 11. Tertii autem duobus numeris separantur. Inter senarium enim & novenarium, duo numeri sunt, septenarius & octonarius. Inter novenarium & duodenarium, denarius & undenarius. Deniq; inter qvartos numeros tres alii dantur, ut inter 8. & 12. dantur 9. 10. 11. & sic in infinitum. Tantum de epimoriis seu superparticularibus.

Hisce vero inter rationes defectûs opponuntur ὑπεπιμόριοι, subsuperparticulares, qvando nempe consequens continet in se totum antecedentem semel & unam præterea ipsius partem. Estq; totupla qvot super-

ſuperparticularis. Vel enim ſubſeſquialtera eſt, quando nempe conſequens terminus antecedentis ſeſquialter fuerit, ut in numeris $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}$ &c. vel ſubſeſquitertia ut $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$, vel ſubſeſquiquarta ut $\frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}$ atq; ita in infinitum. Πυθμένες vero, ſeu primi numeri harum rationum ſunt. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ & quotquot in infinitum ſeipſos unitate ſuperant; hoc eſt, ut conſequens is qui Græcis ὑπόλογος dicitur, unitate excedat antecedentem ſeu τὸν πρόλογον. Multa in hac rem ex Nicomacho Geraſeno, aut Theone Smyrnæo in medium adferre ſupervacuum arbitror, cum res ipſa ſatis per ſe clara ſit.

CAP. IIII.

Quando autem antecedens, totum qvidẽ conſequentem ſemel tantum in ſe habet, eundem vero pluribus partibus excedit, ratio ἐπιμερὴς dicitur Latinis ſuperpartiens. In nũeris enim $\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}$ antecedens comprehẽdit in ſe totum conſequentem, & partes præterea ejuſdem, vel duas, vel tres. Idipſum in cognitis atque effabilibus magnitudinibus & ponderibus locum habet. Magnitudo enim C. pedum ad magnitudinem LX. pedum rationem habet, quam quinq; ad tria, hoc eſt ſuperpartientẽ. Continet enim major magnitudo in ſe totam minorem, & duas præterea ipſius partes tertias. hoc eſt, ſi minor magnitudo in tres æqvales partes ſecetur, tum major, tales qvinq; partes habebit, qvales minor habet tres. Si enim LX. pedum magnitudo in

in tres partes dividatur, cuivis parti convenient pedes XX. Sed qvinqvies XX. faciũt centũ, ergo centũ qvinq; tertias partes alterius habebit. Nicomachus Gerasenus lib. I. Arithmetices. Ἔστι δὲ ἐπιμερὴς μὲν σχέσις ὅταν ἀριθμὸς τὸ συγκρινόμενον ἔχῃ ἐν ἑαυτῷ ὅλον, καὶ προσέτι μέρη αὐτοῦ πλείονα ἑνός. Τὰ δὲ πλείονα ἑνὸς ἄρχεται πάλιν ἀπὸ τοῦ δύο καὶ πρόεισιν ἐπὶ πάντας τοὺς ἐφεξῆς ἀριθμούς, ὥς τε τοῦ ἐπιμεροῦς πυθμήν ἐστιν εἰκότως ὁ πρὸς τῷ ὅλῳ δύο μέρη τοῦ ἀντισυγκρινομένου ἔχων καὶ κληθήσεται ἐπιδιμερὴς εἰδικῶς. Μετὰ δὲ τοῦτον ὁ τρία πρὸς τῷ ὅλῳ ἔχων κληθήσεται ἐπιτριμερὴς (male in edito legitur ἐπιμερὴς) εἰδικῶς, καὶ μετὰ τοῦτον ἐπιτετραμερής, εἶτα ἐπιπενταμερὴς καὶ οὕτως ἀεί. Τὰ δὲ μέρη ῥίζαν ἔχει καὶ ἀρχὴν ἀπὸ τοῦ τρίτου. ἀδύνατον γὰρ ἐνθάδε ἀπὸ τοῦ ἡμίσου ἄρχεσθαι, ἄνευ γὰρ καὶ τινα ὑποθώμεθα δύο ἡμίση ἔχειν τοῦ ἀντιθέτου πρὸς τῷ ὅλῳ, λήσομεν ἑαυτοὺς πολλαπλάσιν ἀντὶ ἐπιμεροῦς τιθέντες. Ἕκαστον γὰρ ὅλον καὶ δύο ἡμίση αὐτόν συντιθέμενα διπλάσιον γίνεται τοῦ ἐξ ἀρχῆς. *Eſt vero ratio ſuperpartiens, qvando numerus totum illum, cui comparatur in ſeipſo habet, & præterea partes ipſius unâ plures. Partes vero iſtæ unâ plures, incipiunt à binario, atq; inde procedunt ad omnes ſequentes numeros. Fundum ergo rationis ſuperpartientis eſt numerus, qvi præter totum eum qvicum comparatur duas ipſius partes habet, & ſpeciatim ſuperbipartiens appellatur. Poſt hunc*

hunc vero is, qvi præter totum tria habuerit, vocatur speciatim supertripartiens, & post illum superqvadripartiens, inde superqvinquepartiens, & sic porro in cæteris. Partes autem radicem & principium habent à ternario. Impossibile enim est in his à dimidio incipere; nisi unà aliqvem numerum supponamus, qvi præter totum oppositum numerum, duas præterea partes ipsius dimidias contineat. Sed tum qvidem pro superpartiente multiplum ponemus. Totum enim compositum, una cum binis sui partibus dimidiis, dat sui ipsius duplum. Prima ergo & omnium simplicissima ratio ἐπιμερὴς seu superpartiens est 5 ad 3. Excedit enim qvinarius ternarium binis partibus tertiis ternarii. Quaternarius enim excedit qvidem binariũ binis partibus, sed ita ut partes illæ ipsius binarii sint dimidiæ, adeoq; 4. multiplus est binarii, nempe duplus. Distingvitur autem multipla ratio à superpartiente. Quæ ergo duabus, tribus, qvatuorve partibus, pluribusve in infinitum aliam excedit magnitudinem, neq; tamen candem pluries in se continet quam semel, neq; superparticularis est, rationem generat superpartientem. Sic ratio 7. ad 4. est superpartiens, & 8. ad 5. etiam superpartiens. Qvæ pluribus perseqvi, operæ precium non arbitror.

Opponitur autem rationi superpartienti illa, cui præponitur particula sub, nempe subsuperpartiens ὑπεπιμερὴς. estque qvando conseqvens antecedentem

tem totum in ſe ſemel continet, & partes præterea ipſius plures una. Sic 4. ad 7. eſt ſubſuperpartiens & 5. ad 8. Atq; ſic in aliis.

Qvando autem antecedens totum minorem aliqvoties in ſe continet, & unam præterea ipſius partem, ratio πολλαπλασιεπιμόριος appellatur latinè multiplexſuperparticularis: cujus quidem rationis variæ ſpecies, tam reſpectu multipli, qvam ſuperparticularis. Etenim ſi bis in ſe contineat oppoſitũ totũ, pars vero excedens fuerit dimidia; ratio vocatur duplaſeſqvialtera: ſi pars tertia, duplaſeſqvitertia: & ſic duplaſeſqviqvarta, duplaſeſqviqvinta, duplaſeſqvioctava, & ſic in infinitum. Si multiplum, triplum fuerit; oriuntur rationes pro partium mutatione, triploſeſqvialtera, triploſeſqvitertia, triploſeſqviquarta, triploſeſqvimillesima. Sic ratio 8001. ad 1000. eſt octuploſeſqvimilleſima. Sic ratio 925. ad 124. eſt noncuploſeſqvicenteſima. Atq; juxta hanc rationem in aliis omnibus. Si enim conſeqvens totum antecedentem ſæpius in ſe contineat, & unam præterea qvamcunq; ipſius partem, oritur ratio ſubmultiploparticularis, ut ratio 1000. ad 8001. ſuboctuploſeſqvimilleſima, & ſic in cœteris, ſubduploſeſqvialtera, ſubduploſeſqvitertia, ſubduploſeſqviqvarta. Tum ſubtriploſeſqvialtera, ut 2. ad 7. ſubtriploſeſqvitertia 3. ad 10., & ſic in aliis. Qvod ſi antecedens totum conſequens in ſe contineat, & partes præterea ipſius una plures; ratio

tio vocatur ἐπιμερὴς & oppoſita huic σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει vocatur ὑποπολλαπλασιεπιμερὴς Latine multiplexſuperpartiens, & ſubmultiplexſuperpartiens. Sic ratio 18. ad 5. eſt triplaſupertripartiens, 17. ad 5. triplaſuperbipartiens: ratio autem 5. ad 18. eſt ſubtriplaſupertripartiens, & 5. ad 17. ſubtriplaſuperbipartiens.

Omnium ergo rationum exceſſûs, qvinque ſunt ſpecies effabiles, & defectus totidem, Multipla, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplaſuperparticularis, multiplaſuperpartiens. Effabiles qvoq; rationes defectus totidem claſſes conſtituunt, apponendo prioribus particulam ſub. Submultipla, ſubſuperparticularis, ſubſuperpartiens, ſubmultiplaſuperparticularis, ſubmultiplaſuperpartiens. Quæ quidem innumeris accuratius perſpiciuntur. XII. enim ad 2. habet rationem ſextuplam, ad 3. qvadruplam, ad 4. triplam, ad 6. duplam: qvæ omnes rationes ſunt multiplæ. inverſæ autem harum ſubmultiplæ, nempe, binarii ad 12. ſubſextupla; ternarii ad 12. ſubqvadrupla; 4. ad 12. ſubtripla; 6. ad 12. ſubdupla. Rurſum 12. ad 8. habet rationem ſeſquialteram, ad 9. ſeſqvitertiam, ad 10. ſeſqviſextam, ad 11. ſeſqviduodecimam, qvæ omnes rationes ſunt ſuperparticulares, & his oppoſitæ σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει cum præpoſitione vocis ὑπὸ ſeu ſub (ut verbis Nicomachi Geraſeni utar) ὑπεπιμόριοι ſeu ſubſuperparticulares, nempe 8. ad 12. ſubſeſqvialtera Græce ὑφημιόλιος 9. ad 22. ſubſeſquitertia,

Græce ὑφεπίτριτος, 10. ad 12. ὑπέφεκτος subsesqvisexta, & deniq; ὑπεπιδωδεκάτος, subsesqviduodecima 11. ad 12.

Porro 12. ad 7. habēt rationē superpartientē, nempe illam qvæ Græce vocatur ἐπιπενταμερὴς, Latine superquinquepartiens, ratio vero 7. ad 12. est subsuperpartiens ὑπεπιμερὴς, nempe ὑπεπίπεμπτος. Porro 11. ad 2. est qvintuplasesqvialtera & 2. ad 11. subqvintuplasesqvialtera. rursum 11. ad 5. est duplasesqvisexta, & 5. ad 11. subdupla-sesqvisexta. Quæ sunt rationes πολλαπλασιεπιμόριοι & ὑποπολλαπλασιεπιμόριοι multiplæsuperparticulares & submultiplæsuperparticulares.

Deniq; 11. ad 5. est ratio duplasuperbipartiens, 11. ad 3. ratio triplasuperbipartiens, 11. ad 4. duplasupertripartiens: & inversa harum eadem nomina retinent σὺν τῇ ὑπὸ προθέσει præponendo particulam sub.

Atq; hoc qvod in numeris explicatum est, in magnitudinibus effabilibus eodem modo consideratur. Ratio enim effabilis in magnitudinibus est, ut numerus ad numerum, sicut Euclidi demonstratum est libro X. Elem. Propos. V. VI. VII. Quæ vero rationes numeris explicari neqveunt, generaliter qvidem ineffabiles appellantur: suntq; vel majores ratione æqvalitatis, vel eadem minores. Si majores fuerint ratione æqvalitatis, adeoq; antecedens conseqvens excedat,

cedat, λόγος ὑπεροχῆς ratio exceſſus dicitur: cui contraria eſt ratio defectus, qvæ ratione æqvalitatis minor eſt, qvando nempe antecedens minus eſt conſeqvente. Verum qvidem eſt, omnes illas qvas antea recenſuimus rationes, qvæ qvidem æqvalitatis non ſint, neceſſario vel exceſſûs eſſe, vel defectûs. Sed qvoniam ſingula earum ſpecialia habent nomina; hæ ineffabiles, cum ſingulari nomine careant, generali denominantur. Qvod vero rationes exceſſus rationibus æqvalitatis vere dicantur majores; & rationes defectus hiſdem minores: poſtea diductius demonſtrabimus.

CAP. V.

Atq; hactenus qvidem rationes juxta primam ipſarum generationem conſideravimus: nunc vero ulterius progrediundum, & affectiones ipſarum paulo accuratius inſpiciendæ. Primum ergo, qvod conſiderandum occurrit, hoc eſt: qvod aliæ rationes ſint ſimplices, aliæ compoſitæ. Simplices vel abſolute, tales ſunt, vel reſpective. Simplices abſolutè, qvæ omnis compoſitionis ſunt expertes. Simplices vero reſpective, ſeu ſecundum qvid, qvæ aliarum rationum reſpectu, qvæ ex his componuntur, ſimplices appellantur. Abſolute ergo ſimplices ſolæ rationes æqvalitatis ſunt, nullam enim compoſitionem agnoſcunt: omnes enim rationes æqvalitatis habent rationem, ut 1. ad 1. Ut vero intelligatur quid ſit com-

poſitio rationum , de ipſa compoſitione pauca dicemus.

Compoſitio eſt, qvando duæ res ita inter ſe junguntur, ut unam rem faciant majorem prioribus ſingulatim ſumptis, ſimul vero ſumptis æqvalem. Huic autem opponitur diviſio. Dixi compoſitum majus eſſe qvavis parte componente ſigillatim ſumptâ. Etenim cum duæ res ſeparatæ antea, invicem junctæ totum aliqvod efficiant; utiq; res illæ qvæ junguntur partes erunt componentes. Totum autem erit compoſitum. Eſt autem totum majus ſingulis ſuis partibus. Fit autem compoſitio, vel per additionem, vel per multiplicationem : ſicut diviſio per ſubtractionem vel diviſionem.

Quando enim linea 6. pedum adjicitur lineæ 6. pedum, totum eſt 12. pedum. Sic linea 5. pedum compoſita cum linea 13. pedum, hoc eſt adjecta lineæ 13. pedum, dat lineam 18. pedum. Idipſum in aliis quoq; magnitudinibus, tam effabilibus, qvam ineffabilibus, tum qvoq; in numeris omnis generis, omnibuſq; ponderibus verum deprehenditur.

Alia autem compoſitio fit per multiplicationem, qvando numerus in numerum, magnitudo in magnitudinem; & pondus deniq; in pondus ducitur. Sic duodenarius componitur ex ſenario ducto in binariū, vel qvaternario ducto in ternarium : Octonarius ex qvaternario ducto in binarium. Sic rectangulum parallelogrammum ABCD componitur ex linea AB

& BC in ſe ductis. Omnis enim linearum rectarum multiplicatio dat compoſitum, parallelogramum rectangulum. Quibus probè ac diligenter obſervatis, videndum porro eſt, qvalem compoſitionem rationes admittant.

Diximus vero antea omnem rationem duos habere terminos, antecedentem & conſeqventem. Si ergo rationes erunt componendæ, tum termini ipſi conjungendi, idq; vel per additionem, vel per multiplicationem.

Termini autem qvi conjunguntur vel ejuſdem rationis ſunt, vel diverſarum.

Ejuſdem rationis, qvando antecedens cujuſdam rationis, compoſitus cum conſeqvente ejuſdem rationis, dat alterius rationis antecedens. Euclides his verbis definit. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. *Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis una cum conſeqvente ad idem conſeqvens.* Sic ratio 9. pedum ad 3. pedes erit compoſita ratio ex 6. pedum ad 3. pedes. Sic ratio 7. ad 2., hoc modo dicitur compoſita ex ratione 5. ad 2. Huic autem opponitur apud Euclidem diviſio rationis, qvæ his verbis definitur. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς ἧ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. *Diviſio autem rationis eſt ſumptio exceſſûs, qvo antecedens excedit conſequens, ad idem conſequens.* Obſervandum vero eſt beneficio hujus com-

compoſitionis continuatæ, omnes rationes multiplas generari incipiendo ab æqvalitate. Si enim $\frac{1}{1}$ antecedens junctum conſeqventi, conferatur cum conſeqvente; erit ratio $\frac{2}{1}$ dupla. Si rurſum antecedens junctum conſeqventi conferatur cum eodem conſeqvente; oritur ratio $\frac{3}{1}$ tripla. Rurſum hoc antecedens junctum conſeqventi; dat rationem $\frac{4}{1}$ qvadruplam: & ſic in infinitum. Adeoq; hoc modo ratio $\frac{4}{1}$ qvadrupla componitur ex ratione æqvalitatis & ratione tripla: & ratio tripla, ex ratione æqvalitatis & ratione dupla: deniq; ratio dupla, ex ratione æqvalitatis hoc modo compoſita. Quod naturæ rerum apprime convenit. Eqvidem alii ut hanc compoſitionem melius demonſtrarent, alium introduxerunt modum compoſitionis per additionem. Cum enim obſervarent, ſi rationes æqvales adderentur, ita ut antecedens antecedenti, & conſeqvens conſeqventi conjungeretur; tum non majorem, nec aliam auctioremve rationem generari, ſed eandem plane cum priori: tantum antecedentes terminos conjunxerunt, eodem conſeqvente retento. Etenim ſi $\frac{1}{1}\frac{1}{1}$ addantur, ita ut antecedens antecedenti, & conſeqvens conſeqventi jungantur, oritur ratio $\frac{2}{2}$ qvæ eſt æqvalis $\frac{1}{1}$ rationi. Sic ſi $\frac{3}{2}\frac{3}{2}$ addantur eo modo, oritur ratio $\frac{6}{4}$ qvæ eadem eſt cum ratione $\frac{3}{2}$. Qvamvis enim & antecedens terminus, & conſeqvens rationis $\frac{6}{4}$ excedant terminos rationis $\frac{3}{2}$ qvilibet, qvemlibet, ratio tamen eſt eadem. Ratio enim $\frac{3}{2}$ eſt ſeſqvialtera, ſicut & $\frac{6}{4}$ eſt ſeſqvialtera,

tera, & ut se habent tria ad duo, sic se habent 6. ad 4. Hoc est ut se habent sex pondo ad 4. pondo, sic se habent 3. pondo ad duo pondo. Et ut centum ulnæ panni ad 30. homines vestiendos sic se habent 50. ulnæ ad 15. homines vestiendos. Ratio est eadem, nempe dupla; quamvis termini utrinq; majores. Hoc itaque cum Geometræ & Mathematici animadverterent, facile consideràrunt rationes per additionem terminorum utrinq; componi non posse. Quoniam vero viderent, in plurimis rebus, hanc rationum compositionem, quæ additione peragitur, magnum usum habere: hoc modo eandem perfecere. Diversarum enim rationum antecedentes terminos invicem additione conjunctos cum eodem consequente compararunt, adeoq; certo modo compositam tationem habuere. Quamvis si accurate loqvi velimus, hæc compositio non est integrarum rationum; sed tantum duorum terminorum: nempe vel ejusdem rationis, ut in compositione, qvā juxta Euclidis mentē recensuimus: vel antecedentium tantū terminorū diversarum rationum. Et si posteriori quidē modo compositio fiat, tū rationes multiplas easdē habebimus quas prius. Componatur enim ratio $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ datur ratio $\frac{2}{1}$. Antecedentia enim duæ unitates compositæ, dant duo: quæ collata cum unitate eodem consequente, dant rationem duplam. Porro hæc rursū composita cum ratione æqvalitatis, dat rationem triplam $\frac{1}{1}\frac{2}{1}$. Etenim duo & unum dant tria consequens, autem idem est: ratio ergo est $\frac{3}{1}$. Si rursum hæc ratio

cum ratione æqualitatis componatur, oritur ratio quadrupla. & ſic quintupla, ſextupla atq; in infinitum. In his vero omnibus rationibus, idem obtinetur methodo Euclidis, ſi nempe antecedens junctum conſequenti cum eodem conſequente comparetur, ut antea indicatum fuit. Si vero rationes alias eodem modo inveſtigare aut componere aliquis voluerit, id qvidem poſteriori methodo facillime fit. Ita enim ratio ſeſquialtera componitur ex ratione æqvalitatis, quæ integrum ſeu totum repræſentat, & ratione dimidia. $\frac{2}{2}\frac{1}{2}$ dāt $\frac{3}{2}$ Ratio enim duo ad duo eſt æqualitatis; $\frac{1}{2}$ eſt ſubdupla, compoſita dat $\frac{3}{2}$. Sic ratio quintupla componitur ex ratione dupla & tripla $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ dant $\frac{5}{1}$. Habet vero hæc rationum compoſitio magnum in Mechanicis uſum, imo in omni vitæ genere. Sit enim v.g. lacus aliquis forma rectangulari oblongâ aquis plenus, cujus longitudo ſit pedum 500., latitudo 50. & profunditas 8 pedum. Aquæ ergo omnes lacus facient pedes cubicos 200000. Longitudo enim ducta in latitudinem, dat ſuperficiem 25000 pedum quadratorum, in quam ducta profunditas, dat totum corpus vel molem aqueam 200000. pedum cubicorum. Locum vero quam celerrime evacuatum velim. Habeo autem rotam decem concavitatum ſeu camerarum, quarum ſingulæ pedem unum cubicum exhauriunt, ipſa autem rota totaq; ipſius peripheria uno minuto horario unam facit circumgyrationem. Locum autem purgatum optarem ſpatio unius diei, vel etiam breviori,

viori, si fieri posset. Applico præter priorem rotam alias tres, quarum singulæ decem quoq; habeant concavitates, sed triplo capaciores, ita ut singulæ tres pedes cubicos exhauriant : habeo præterea ad manum duas adhuc alias rotas quindecim cameris instructas, quarum singulæ exhauriunt duos pedes cubicos aquæ. Appositis ergo omnibus sex rotis erit ratio unius cameræ primæ rotæ ad totam aquarum molem, $\frac{1}{200000}$. adeoq; totius rotæ $\frac{10}{200000}$ seu $\frac{1}{20000}$. Ratio porro alterius rotæ est ad totam aqvarum molem $\frac{3}{20000}$. Etenim cujusvis cametæ ratio est $\frac{3}{200000}$. adeoque decem cauitatum erit $\frac{30}{200000}$ seu ut supra. Tres autem rotæ eodem modo sunt constructæ, eandemque singulæ capacitatem habent. unde ratio earum est eadem. Denique rota quindecim cavitatum habet rationem ad totam aquarum molem $\frac{30}{200000}$. seu $\frac{3}{20000}$ qvævis enim cavitas capit 2. pedes cubicos, adeoque ratio cujusq; cavitatis ad totam aquarum molem est $\frac{2}{200000}$ seu $\frac{1}{100000}$. unde 15. cavitatum erit $\frac{15}{100000}$ seu retento eodem consequente $\frac{3}{20000}$. His ergo omnibus rationibus invicem compositis dabitur evacuatio conveniēs uni minuto horario, unde cognoscetur evacuatio unius horæ, adeoq; qvanto tempore tota evacuatio contingat. Reductæ autem omnes rationes ad eundem terminum conseqventem, habebunt se omnia juxta priora, posita cujusvis minuti evacuatione ut prius.

$$\frac{1}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000} \quad \frac{3}{20000}.$$

Compositæ vero hæ rationes, dant rationem omnium rotarum ad totam aquarum molem singulis minutis $\frac{16}{20000}$ seu $\frac{1}{1250}$. Una ergo hora dabit 60 circumgyrationes, eritque ratio $\frac{60}{1250}$ seu $\frac{6}{125}$. Horis ergo 20. & 50′. totus lacus evacuabitur. In his ergo aliisq; plurimis exemplis hujus generis, hæc rationis compositio locum habet. Si enim tum per multiplicationem progredi vellem, nihil efficerem. Hoc ergo modo ex ratione $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{1}$ composita dici potest ratio quintupla, quamvis compositio hæc valde sit imperfecta, ut antea indicatum: cum non totæ rationes, sed tantum termini earum antecedentes componantur.

Integra autem & perfecta compositio rationum est, quando duarũ rationũ excessus ambo termini antecedens cum antecedente, & consequens cum consequente invicem conjunguntur. Talem vero compositionem additione fieri non posse, Geometræ statim deprehenderunt. Etenim cum omnis compositio, rem compositam auctiorem & majorem reddere debeat, quam antea fuit: ergo cum id additione amborum terminorum invicem non semper fiat; sed in omnibus quidem æqualibus rationibus totum sit æquale singulis partium unde componitur, in aliis vero aliquando minus: sequitur talem additionem compositionem appellari non debere. Si enim rationem triplam cum tripla ratione per additionem antecedentium invicem, & consequentium invicem componere voluerim, ratio erit tripla. Habeat enim in figura

gura No. 2. AB. ad CD. rationem triplam; EF. ad GH. rationem triplam, dico, si AB. jungatur ipsi EF. & CD ipsi GH. tum totam ABEF. ad totam CDGH. habere rationem triplam. Si enim AB. fuerit 6. pedum, CD. erit 2. pedum. & si EF. fuerit 9. pedum GH. erit 3. pedum. Jungantur AB. & EF. tota AB EF. erit pedum 15. jungantur EFGH. tota EFGH. erit pedum 5. At 15. est triplum 5., sicut 9. est triplum 3., & 6. triplum binarii. unde ratio ubique eadem, nempe tripla. Quod si ratio minor ratione æqvalitatis componatur: hoc modo cum ratione quacunq; excessus, tum totum minus erit sua parte. ut si ratio $\frac{3}{1}$ seu $\frac{6}{2}$ componatur cum ratione $\frac{1}{2}$ prodit ratio $\frac{7}{4}$ At ratio $\frac{12}{4}$ seu $\frac{3}{1}$ est major ratione $\frac{7}{4}$. Liquet ergo ex his, rationes per additionem amborum terminorum antecedentium invicem & consequentium invicem componi non posse, neque illam compositionem ullo modo esse legitimam, sed potius divisionē aliquam esse, de qvibus in sequentibus. Scio quidem Aristotelem Rhetoricorum lib. III. c. VIII. hujus compositionis aliquam fecisse mentionem. Verba qvatenus huc spectant adscribam, Τῶν δὲ ῥυθμῶν ὁ μὲν ἡρῷος σεμνὸς καὶ λεκτικὸς καὶ ἁρμονίας δεόμενος. ὁ δὲ ἰαμβός αὐτή δὲ ἐστιν ἡ λέξις ἡ τῶν πολλῶν. ὁ δὲ τροχαῖος κορδακικότερος. λείπεται δὲ παιὰν ᾧ ἐχρῶντο μὲν ἀπὸ Θρασυμάχου ἀρξάμενοι, οὐκ εἶχον δὲ λέγειν τίς ἦν. Ἐστι δὲ τρίτος ὁ παιὰν καὶ ἐχόμενος τῶν εἰρημένων. τρία γὰρ πρὸς δύο ἐστίν. Ἐκείνων δὲ, ὁ μὲν ἓν πρὸς ἕν, ὁ δὲ δύο πρὸς ἕν.

Ἔχεται δὲ τῶν λόγων τούτων ὁ ἡμιόλιος. οὗτος δὲ ἐστὶν ὁ παιάν. *Ex rhythmis vero Herous grandis & dictioni accommodatus & Harmoniæ indigens. Jambus vero ipsa est elocutio multitudinis Trochæus autē magis saltationi coveniens. Relinqvitur Pæan, quo usi sunt incipientes à Thrasymacho. Non potuerunt vero dicere quinam esset. Tertius autem est Pæan, & continet jam dictos. Est enim ut tria ad duo illorum autem unus est, ut 1. ad 1., alter ut duo ad unum. Has vero rationes continet sesqvialtera, quæ est Pæan.* Porro indicat, de quo Pæane verba faciat. duos enim Pæanes contrarios dicit. *Unus enim est* οὗ ἄρχει μὲν ἡ μακρὰ, τελευτῶσι δὲ τρεῖς βραχεῖαι, ἕτερος δὲ ἐξ ἐναντίοις, οὗ βραχεῖαι ἄρχουσι τρεῖς, ἡ δὲ μακρὰ τελευταία *qvi incipit à longa, terminatur tribus brevibus* (cujus signum in Poeticis est *-vvv*) *alter vero ex contrariis incipit tribus qvidem brevibus, una longa.* (cujus signum est in Poeticis *vvv-*) Herous seu dactylus componitur ex una longa, duabus breuibus. una autem longa æquatur binis brevibus. ergo ratio dactyli est 2. ad 2. seu 1. ad 1. Jambus vero componitur ex brevi & longa *v-*, hoc est ex tribus brevibus, estq; ut unum ad duo. Trochæus autem ex longa & brevi, estq; duo ad unum. Unus ergo Pæan componitut ex dactylo & jambo, vel ut terminum Aristotelis retineamus, continet dactylum & jambum, seu rationem æqvalitatis & subduplam $\frac{1}{1}\frac{1}{2}$, unde oritur ratio subsesqvialtera. antecedentia enim adjecta conseqventibus, dant rationē $\frac{2}{3}$. Alter vero Pæan, qvem vulgo qvartum vocant, conti-

net

net dactylum & Trochæum seu rationem $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$ adeoque est ἡμιόλιος. Adjecta enim antecedentia antecedentibus, & consequentia consequentibus dant rationem $\frac{3}{2}$. Nec tamen hæc terminorum conjunctio compositio appellatur Aristoteli, neque proprie loqvendo compositio est. Etenim una partium est major toto: ratio nempe dupla est major ratione sesqvialtera, adeoque trochæus major qvam Pæan quartus: qvod est perabsurdum. Unicus ergo modus componendi rationes totas perfectè, antecedentia nempe cum antecedentibus, & conseqventia cum consequentibus, fit per multiplicationem, qvando nempe antecedens cum antecedente, & consequens cum consequente multiplicatur, qvi qvidem qvatenus ad lineas pertinet, ab Euclide propositus est libro VI. Elementorum propositione XXIII. ubi demonstrat æqviangula parallelogramma, rationem invicem habere ex lateribus conjunctā. Nempe si datæ fuerint qvæcunque rationes excessûs in lineis, siue effabiles, sive ineffabiles, parallegrammum rectangulū ex antecedentibus terminis constructum, ad parallelogrammum rectangulum ex consequentibus terminis, habebit rationem compositam ex his binis rationibus.

Sint enim datæ duæ rationes excessûs AB. ad BC. & BD. ad BE. constituatur ex AB. & BD. antecedentibus terminis parallelogrammum rectangulum; & aliud ex consequentibus BC. & BE. Quoniam ergo hæc bina

na parallelogramma ſunt æquiangula, ergo habent rationem invicem conjunctam ex lateribus per XXIII. Propoſitionem. adeoq; erit ut AB. ad BC. & DB. ad BE. ſic parallelogrammum AD. ad parallelogrammum CE. Neque ſane aliter eſſe poteſt. Cum enim ambo termini utriuſq; rationis invicem multiplicentur: ipſæ qvoq; rationes invicem ſunt multiplicatæ. omnis autem talis multiplicatio in rationibus exceſſus eſt compoſitio, ut antea dictũ. Neque in rationibus alia compoſitio perfecta eſt, prȩter illã, quæ fit per multiplicationem. Duæ autem lineæ rectæ in ſe ductæ, hoc eſt multiplicatæ invicem generant parallelogrammum. Ergo parallelogramma æqviangula ex antecedentibus & conſequentibus exſtructa exhibent rationem compoſitam ex binis aliis rationibus.

Atq; hoc qvidem in numeris non minus clarum perſpicitur. Etenim ſi duæ rationes triplæ componantur invicem, oritur ratio noncupla ut $\frac{3}{1}\frac{3}{1}$ dant $\frac{9}{1}$. Antecedentibus enim invicem, & conſeqventibus in ſe ductis oritur ratio $\frac{9}{1}$.

Liqvet ergo eandem & in Geometricis & Arithmeticis rationum compoſitionem eſſe. Sicut enim in Arithmeticis ambo antecedentia in ſe ducta ſeu invicem multiplicata, dant antecedens compoſitæ rationis: & conſequens ſimiliter ductum in conſeqvens, dat compoſitæ rationis conſequens, ita etiam in Geometricis ambo antecedentia, ſeu ambæ antecedentes magnitudines, qvæ certis lineis indicantur, in ſe ductæ dant

par-

parrallelogrammum, qvod qvidem ad parallelogrammum ex binis qvibuſcunq; lineis, qvæ conſequentes terminos ſeu magnitudines repræſentant, conſtructum, rationem habet ex lateribus compoſitam.

Quoniam vero neceſſarium eſt, rationes haſce compoſitas non tantum in parallelogrammis, ſed etiam in rectis lineis exhibere; methodum hujus rei in ſeqventibus proponam, eadem multiplicatione, per parallelogramma, ſemper retenta, ut benevolus lector pervideat, quã bene modus componendi rationes, tam Geometrice qvam Arithmetice invicem conveniat.

Hanc vero compoſitionem rationum, qvæ ita per antecedentium & conſeqventium terminorum mutuam multiplicationem peragitur, omnino genuinam eſſe, atque in ipſa natura fundamentum habere, ex Harmonicis diſcimus. Cum enim Harmonia diateſſaron ex qvatuor tonis componatur, qvorum primus ad ſecundum eſt in ratione ſeſqvioctava, tertius vero ad qvartum, ut 256. ad 243: ergo ratio quæ dat diateſſaron, hoc eſt ratio ſeſqvitertia, componitur ex hiſce tribus rationibus $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{8}$ & $\frac{256}{243}$. Quod etiam hac compoſitione verum eſſe deprehenditur. Ratio enim $\frac{9}{8}$ ſeu ſeſquioctava compoſita cum ratione ſeſqvioctava, dat rationem $\frac{81}{64}$. Porro ratio $\frac{256}{243}$ compoſita cum ratione $\frac{81}{64}$, dat rationem $\frac{20736}{15552}$ ſeu $\frac{4}{3}$ hoc eſt ἐπίτριτον ſeſqvitertiam. Maximus enim communis diviſor 5184. ſecat antecedentem terminum 20736.

in 4. partes & consequentem 15552. in tres. adeoq; ratio 20736. ad 15552. est ratio sesquitertia, seu in minimis numeris $\frac{4}{3}$. At componitur ratio 20736. ad 15552. hoc est $\frac{4}{3}$ ex ratione 81. ad 64. & 256. ad 243. ratio autem 81. ad 64. componitur ex binis sesqvioctavis, adeoque ratio $\frac{3}{4}$ seu sesqvitertia, qvæ dat harmoniam diatessaron componitur ex binis ἐπογδόοις sesqvioctavis & limmate, cujus ratio est, ut numerus ad numerum 256. ad 243. Hæc est illa harmonia universi, juxta qvam omnium rerum compositio est ordinata, qvam pulcherrimis verbis describit Plato in Timæo, & ex eo Cicero in libro de Universo, de qva re postea plenius, ubi de analogia speciatim erit agendum. Ita ergo hæc rationum compositio qvæ fit per multiplicationem antecedentium terminorum inter se, & conseqventium inter se, in ipsa natura fundamentum habet.

CAP. VI.

Hactenus qvidem compositionem rationum consideravimus: Seqvitur divisio, qvæ varia: non secus quam ipsa compositio. Etenim vel totalis divisio est, vel partialis. Totalis est, quando magnitudo à magnitudine, vel numerus à numero, vel denique pondus à pondere aufertur toties, qvoties fieri potest, ita ut nihil remaneat. Partialis autem, qvando semel tantum, ita ut aliqvid remaneat.. Prior κατ' ἐξοχὴν divisio dicitur, posterior subtractio. Sic si mag-

ſi magnitudo 6. pedum auferatur à magnitudine 18. pedum ſemel, remanent 12. pedes. At ſi dividatur per 6 pedes, nihil qvidem remanet non diviſum, totum vero diviſum eſt 3. pedum. In diviſione ergo proprie ſic dictâ, tria veniunt notanda, dividendum, dividens & diviſum. Ut in priori exemplo magnitudo 18. pedum eſt dividendum, magnitudo 6. pedum eſt dividens, & magnitudo 3. pedum eſt diviſum, ſive id qvod fit ex diviſione. Quod ipſum in numeris & ponderibus eodem modo ſe habet. Eſt autem diviſio proprie dicta, vel perfecta, vel imperfecta. Perfecta, qvando poſt diviſionem nihil remanet non diviſum. Imperfecta, quando poſt diviſionem aliquid remanet non diviſum. In priori exemplo, magnitudo 6. pedum ita dividit magnitudinem 18. pedum ut peracta diviſione nihil remaneat non diviſum. Si vero diagonalis qvadrati alicujus dividatur per latus alterius qvadrati, quod prioris ſit ſubſexdecuplum, adeoque baſis baſeos ſubqvadrupla: erit qvidem diviſio illa in qvinque partes, ſed non perfecta. Dividit enim baſis diagonalem iſtam in qvinque partes, ita tamen ut aliquid remaneat non diviſum, imo qvod neque ullo modo dividi poteſt à baſi; cum earum ratio mutua ſit ineffabilis, qvamuis potentia ſit effabilis.

Quoniam vero hæc rationum diviſio magno nobis uſui poſtea ſit: neceſſarium arbitror eam accuratius explicare, ſingulaſque ipſius affectiones diligentius con-

conſiderare. Qvod ut fiat, antea diviſio omnium quantitatum conſideranda erit, tam in numeris, qvam magnitudinibus ac ponderibus.

Dico ergo primùm, diviſionem eſſe duarum quantitatum homogenearum conjunctionem mutuam, ex qua alia fit quantitas, vel una priorum, vel utraque minor.

Per quantitates homogeneas intelligo numeros, cum numeris, lineas cum lineis, pondera cum ponderibus conjungi. Per conjunctionem vero intelligo multiplicationem. Nulla enim diviſio ſine multiplicatione. Si enim magnitudo 20. pedum per magnitudinem 4. pedũ erit dividenda, utique minor qvinquies multiplicanda, ut totum in qvinque partes dividat. Quoniam vero in omnibus rationibus effabilibus, σχέσις ſemper ſit totius ad partes, vel partis aut partium ad totum: utique diviſio rationum effabilium ex diviſione harum rerum optime intelligetur. Antea enim indicavimus omnes rationes effabiles, eſſe ut numerum ad numerum. Ratio autem numeri ad numerum eſt, ut tot partes unius integri, ad partes qvotcunque alterius integri. Sic magnitudo 256. partium ad magnitudinem 243. partium habet rationem quam numerus ad numerum: hoc eſt ut 256. partes ad 243. partes. Atque id adeo in omnibus rationibus effabilibus verum eſt; ut nulla plane ratio ſit effabilis, niſi quæ numero explicari poſſit. Ut ergo doctrinam diviſionis rationum intelligamus, in partium

tium natura primum addiſcenda erit. Atq; ut in priori exemplo maneamus, ſit magnitudo AB. in figu.num. 3. partium 256. talium, qualium magnitudo CD. in eadem figura eſt partium 243. Ratio ergo AB. ad CD. eſt 256. ad 243. Secetur AB. bifariam in E. ratio ergo AE. ad AB. eſt 128. ad 256., ſeu 1. ad 2. Etenim AE. continet partes 128. tales, quales AB habet 256. Eſt vero numerus 128. dimidius numeri 256. Erit ergo ratio harum partium, ut 1. ad 2. Ratio autem AE. ad CD. erit 128. ad 243. In minoribus enim numeris non datur. magnitudo autem AE. partes habet 128. tales, qvales magnitudo CD. partes habet 243. Secetur porro magnitudo CD. in tres partes, & ſit triens hujus CF. erit ergo ratio CF. ad CD., ut 81. ad 243., ſeu 1. ad 3. Cum enim CF. ſit triens ipſius CD., ergo qvalium CD. habet 243. partes, talium CF. habebit 81. partes. ut ſi CD. eſſet pedum 243. eſſet CF. triens hujus pedum 81. cum 81. ſint tertia pars 243. Eſt ergo ratio CF. ad CD. ſubtripla, ſeu $\frac{1}{3}$: vel retentis prioribus numeris ut 81. ad 243. Ad magnitudinem vero AB. eſſet ut 81. ad 256. & ad magnitudinem AE. ut 81. ad 128. Si ergo magnitudinem AE., qvæ habet centum viginti octo ducenteſimas qvinqvageſimas ſextas partes, ita dividere cuperem, ut diviſum eſſet, ſicut CF. ad CD. ſeu haberet octuaginta unam ducenteſimas qvadrageſimas tertias partes: divido ſingulas partes ducenteſimas qvinqvageſimas ſextas in partes ducentas qvadraginta

 tres,

tres, hoc eſt multiplico 256. per 243. prodeunt 62208. Adeoq; tota AB. habet ſexagies bis mille ducentas & octo partes ducenteſimas qvadrageſimas tertias: hoc eſt cum ſingulæ partes ducenteſimæ qvinqvageſimæ ſextæ ipſius AB. ſectæ fuerint in partes ducentas quadraginta tres, erit tota AB. ſecta in partes tales 62208. Adeoque cum 256. partes ſecentur in 62208. partes; utique 128. ſecabuntur in 31104. ejuſdem menſuræ partes. Ut autem partem habeamus, qvæ ſit ad 128. hoc eſt ad 31104. ut 81. ad 243. erit ut 243. ad 81. ſic 31104. ad qvartum quæſitum, ſeu ad 10368. Hoc eſt 10368. ſe habet ad 31104. ſeu 128. partes ducenteſimas qvinqvageſimas ſextas magnitudinis AB. ut 81. ad 243. Quæ qvidem portio, etiam ex ſola multiplicatione antecedentium cognoſcitur. 81. ducta in 128. dant 10368. Eritque ratio partis hujus datæ, quæ ad 128. ſe habet, ut 81. ad 243., ad totam magnitudinem AB. ſeu 256., ut 10368. ad 62208. Adeoque magnitudo qvæ prius eo modo diviſa erat, ut pars ad totum eſſet ut 128. ad 256. nunc iterum ſecundum eandem partem ita diviſa eſt, ut pars poſterior ad priorem ſit ut 81. ad 243. ad totum autem ut. 10368. ad 62208. ſeu reductis numeris ad minima, ut 1. ad 6.

Idipſum pluribus exemplis illuſtrare velim, ut eo melius diviſionis naturam perſpiciamus. Sit magnitudo AB, alia magnitudo CD, qvæ qvidem ſi invicem debeant eſſe commenſurabiles, tum CD. bifariam

am erit secanda. Continet enim AB totam in se CD. ter, & partem præterea ipsius dimidiam; hoc est, habet partes 7. tales, qvales CD. habet duas. Optarem tota AB. bifariam secta in E. omnes tres magnitudines AB. AE. & CD. commensurabiles efficere, ita ut eadem mensura mensurari possent. Divido singulas partes septimas ipsius AB bifariam, hoc est, multiplico 7. per binarium, prodeunt 14. Adeoque tota AB. talium est 14, qvalium AE. est 7. Divido qvoque singulas partes ipsius CD. bifariam, hoc est multiplico duo per duo, prodeunt 4. Cum ergo AB. nunc sit 14. partium talium, qvalium CD. est qvatuor; erit AE. 7. talium, qualium CD. est qvatuor. Atq; hoc facillime ipsi rationum compositioni applicatur. Ratio enim AB. ad CD. est eadem quæ partium 7. ad 2. Ratio autem AE. ad AB est semissis ad integrum, hoc est 1. ad 2. Quæro rationem AE. ad CD. qvam antea deprehendi esse, ut 7. partes ad qvatuor partes. Divido rationem 7. ad 2. per rationem 1. ad 2. & qvidem multiplicando antecedentia invicem; & conseqventia invicem: prodit ratio 7. ad 4. Etenim in rationibus $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{2}$ semel septem sunt septem, bis bina quatuor: prodit ratio $\frac{7}{4}$. Dixi autem in omni divisione, divisum vel utroque terminorũ singillatim sumpto minus esse, vel alterutro. Etenim si 20. dividantur per qvatuor, divisum erit 5. At quinque minor qvidem est dividendo, sed major divisore quaternario. Si vero 20. dividantur per 10, divisum erit duo: & tum divisum

ſum minus eſt & dividendo, & diviſore. Quod ipſum in rationum diviſione locum habet. Si enim ratio exceſſus dividatur per rationem defectus, diviſum minus qvidem eſt ratione exceſſus, ſed majus ratione defectus. Ut in antecedenti ſchemate, ratio 7. ad 4. eſt major quidem ratione $\frac{1}{4}$, ſed minor ratione 7. ad 2. ſeu 14. ad 4. Verum de his plenius ubi ad rationes majores & minores ventum fuerit. Nunc tantum naturam diviſionis indicaſſe voluimus.

Verum pluribus hæc exemplis ſunt illuſtranda. Sit magnitudo AB. 7. partium talium, qualium CD. ſit 2. Secetur AB. in AF. ita ut tota AB, tres partes tales habeat, quales AE. majus ſegmentum habet duas; & minus BE. unam. Velim ſcire qua communi menſura majus ſegmentum & CD. magnitudo menſurantur. Seco totam in tres partes, & ut conveniant invicem particulæ ipſius CD. & AB: ſeco ſingulas partes ſeptimas AB. & ſingulas partes ſecundas CD. trifariam. adeoque tota AB. habet 21. partes tales, quales CD. habet 6. Majus ergo ſegmentum habebit 14. tales, quales AB. habet 21. hoc eſt quales CD habet 6. Id autem ipſum breviſſima methodo inveſtigatur, multiplicando 2. per 7. & tria per duo. Nam & AB. tum debito modo ſecta eſt: & ſegmentum ejus factum eſt commenſurabile ipſi CD. Eſt vero ratio AB. ad CD. ut partes 7. ad 2. ratio autem AE. ad AB. eſt ut duæ partes ad tres partes, ſeu ut 2. ad 3. Multiplicentur antecedentia cum antecedentibus, & conſeqventia cum

cum antecedentibus, & conſequentia cum conſequentibus, erit bis ſeptena 14: ter bina 6. datur ergo ratio majoris ſegmenti ad CD. ut 14. partes ad 6. vel 7. ad 3.

Compoſitio ergo vera & perfecta rationum & earundem perfecta diviſio, eodem plane modo fiunt per multiplicationem. Tantum inter ambas hoc diſcrimen eſt, quod tertium ſeu productum illic augeatur, majuſque ſit utravis rationum; heic vero minuatur: & vel utraque rationum minus ſit, vel una. Et ne quis exiſtimet hanc diviſionem jure appellari non poſſe; demonſtro, in diviſionibus qua partes tota, juxta certam menſuram, vel partes partes ſecant, hanc eandem dividendi methodum locum habere. Si enim duæ ſeptimæ partes alicujus magnitudinis in quatuor quinque partes ſint ſecandæ, hoc eſt AE qvæ habet duas partes tales, quales AB habet 7. ſecanda erit in ſingulis partibus, ita ut qvæuis pars ſecta ſe habeat ad quamvis partem ſecundam ipſius AE. vel ſeptimam AB. ut CF. ad CD. hoc eſt ut quatuor ad quinque. Seco ſingulas partes in qvinque. Adeoque tota AB. ſecta eſt in partes 35. tota autem AE in partes 10. Ut vero quatuor ad quinque, ſic 8. ad decem. Adeoque octo decimæ partes ipſius AE. erunt octo triceſimæ quintæ partes ipſius AB. Idipſum methodo ſuperius tradita facillime inveſtigatur. Partes enim ſunt $\frac{2}{7}$ & $\frac{4}{5}$ quæ conjungantur invicem multiplicando ſuperiora cum ſuperioribus (Græci ſuperiores numeros vo-

 cant

cant προλόγȣς inferiores ὑπολόγȣς) prodit numerus $\frac{8}{35}$. Idipſum adeo in omnibus partium diviſionibus contingit, qvæ per alias partes dividuntur. Partem autem voco qvicquid ab alio exceditur, vel una, vel pluribus partibus. ſic $\frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{6}$ ſunt partes. $\frac{7}{2}$ autem partis partiumve nomine non veniunt: cum totum ſit, continens in ſe tot partes tales alterius. In omnibus ergo magnitudinibus commenſurabilibus partes dicuntur quando antecedens minus eſt conſequente. Totũ vero, quando antecedens majus eſt conſequente. Ut ergo ſemel dicam, qvando tota cum partibus, vel partes cum partibus hoc modo conjunguntur, diviſio fieri dicitur. Etenim quod ex hac conjunctione fit, minus eſt vel uno vel alterutro terminorum. At compoſitionem id vocare, quando id quod fit, minus eſt eo ex quo fit, id vero perabſurdum eſt. Si enim res componuntur, augentur: & compoſitum erit totum; ea vero quæ componunt, partes. Totum autem majus eſſe partibus ſuis haud dubium.

Quando ergo ratio exceſſus conjungitur cum ratione defectus, ratio exceſſus per rationẽ defectus diviſa eſt. & illa ratio quæ inde oritur, ratio diuiſa appellatur; ſaltem ita appellari jure debet: quandoquidem ſemper minor ſit quam ratio exceſſûs primo loco poſita. Eodem modo, quando ratio defectûs cum ratione defectus per multiplicationem conjungitur; major ratio à minore diuiditur: & ea ratio quæ ex hac conjunctione oritur, minor eſt utraque, adeoque diviſum. Quod

in

in ſequentibus poſtea plenius demonſtrabimus. Optime ergo Euclides, quando hanc conjunctionem rationum indicare voluit, ſemper uſus eſt voce συγκεῖσθαι conjici aut conjungi; non vero συντίθεσθαι: quod alii forte Græci Mathematici non tam diligenter obſeruauerint: quamvis & certo modo eorum vocabula explicari poſſint: qua de re pluribus poſtea dicendum. Quod ſi quis præfracte contenderit, etiam illam conjunctionem, compoſitionem eſſe dicendam, quæ fit inter rationes exceſſûs & defectûs, vel rationes defectus inuicem: non video quomodo compoſitionem à diviſione ſejunxerit. Etenim compoſitionem eſſe contrariam diviſioni, vix quiſquam negauerit. Neq; ullum arbitror dicturum, diviſionem ullo modo poſſe appellari compoſitionem. At quando duæ magnitudines ita invicem conjunguntur, ut unum productum faciant minus vel utraque earundem magnitudinum, vel una ſaltem: tum diuidit una magnitudo aliam eandemque imminuit, non vero auget. Diuiſio ergo rationum ex diviſione magnitudinum optime intelligitur, ſicut & illarum compoſitio, ex harũ compoſitione. Quoniam vero hæc accurate in rationibus demonſtrari nequeunt, niſi antea rationes æquales & inæquales fuerint explicatæ: harum naturam jam paucis indicabimns, cum unum per aliud eo melius & facilius intelligatur.

CAP. VII.

Æquales rationes dicuntur, quæ ſe inuicem nec majores ſunt, nec minores. Ratio autem altera ratione major dicitur, quæ æqualem excedit : Minor vero quæ ab æquali ratione deficit. Sicut autem quantitates cum quantitatibus comparatæ, vel æquantur inuicem, vel ſunt inæquales, ita ut una quidem aliam excedat, altera vero excedatur: ita etiam rationes invicem comparatæ, uel æquales ſunt, uel inæquales. Æquales rationes ſunt, quarum quantitas eſt æqualis: ut dupla ratio duplæ; tripla, triplæ; ſextupla, ſextuplæ; ſeſquialtera, ſeſquialteræ; atq; ſic in omnibus rationibus exceſſus: tum ſubdupla, ſubduplæ; ſubtripla, ſubtriplæ; ſubquadrupla, ſubquadruplæ; ſubſeſquialtera, ſubſeſquialteræ: atque ſic in infinitum. Ex æqualium vero rationum natura, inæqualium rationum cognitio dependet. Sunt enim inæquales rationes, quarum quantitates invicem comparatæ ſunt inæquales; & cujus quantitas major, illa ratio major eſt; cujus vero quantitas minor, illa ratio minor. Quantitates autem, per æqualitatem menſurantur Si enim magnitudo quæcunque cum alia quacunque magnitudine comparetur, quarum una aliam excedit; ſumatur in majori magnitudine alia, minori æqualis, dabitur ſtatim exceſſus majoris. Ita etiam in rationum collatione, ſi una conferatur cum ratione quæ alteri eſt ęqualis; ſtatim qvidem apparebit, an altera ratio vel major ſit, vel minor, vel æqualis. Quæ-

rendum

rendum ergo primo, qua methodo rationes æquales investigentur. Et in magnitudinibus quidē una ac simplicissima methodus est, nempe per multiplicationem in rationibus excessus, & divisionem in rationibus defectus. Est enim multiplicatio, ut unitas ad multiplicantem, sic multiplicandus ad multiplum seu quartum qvæsitum. Ut verbi gratia in numeris, si velim multiplicare 128. per 4. erit ut 1. ad 4, sic 128. ad 512. Contra divisio est, ut divisor ad unitatem, sic dividendus ad divisum, seu quartum qvæsitum, ut si 512 dividendus sit per 128. erit ut 128 ad 1, sic 512. ad 4. Quod autem unitas in numeris, id minor duarum magnitudinum est in magnitudinibus. Quando enim quæro aliquam magnitudinem qvę toties aliam in se contineat magnitudinem, qvoties alia magnitudo aliam, hoc est ut clarius dicam, qvando datis tribus magnitudinibus, quarum prima major est quam secunda; qværo autem qvartam, qvæ juxta eandem mensuram tertiæ excedat tertiam, juxta qvam prima excedit secundam: constructis triangulis similibus, ut in figu. num. V. dico ut secunda ad primam, sic tertia ad qvartam. Sit enim AB. 7. pedum: BC. 1. DE. 9 pedum: dico, ut se habet BC ad AB. sic DE. ad qvartum quæsitum.

seu ut 1. ad 7, sic 9. ad 63.

Quod qvidem sola multiplicatione investigatur. In lineis autem est, ut BC. ad AB, sic DE. ad EA. At q; hoc adeo in omni multiplicatione verum est. Si e-

nim BA. fuerit dupla ipſius EB. etiam EA. erit dupla ipſius DE. & ſi BA. ſeſquialtera ipſius BC, etiam EA. erit ſeſqnialtera ipſius ED: ac demum juxta quamcunque rationem, AB. major fuerit magnitudine BC. juxta eandem rationem magnitudo AE major erit magnitudine DE.

Omnis ergo multiplicatio in magnitudinibus hoc modo fit. Si datis tribus magnitudinibus, qvarum prior major ſit ſecunda, qværo autem qvartam, quæ juxta eandem rationem & multiplicationem ſit major tertia, qua prior major eſt ſecunda: dico, ut ſecunda minor ad primam majorem, ſic tertia ad qvartam. Adeoque quando datam qvācunqe magnitudinem ita augere velim, ut aucta ſeu compoſita ad ſimplicem habeat eandem in exceſſu rationem, quam alia magnitudo major ad aliam minorem, conſtructo triangulo juxta figuram num. V. dico ut ſecunda minor ad primam majorem, ſic tertia ad quartam. Adeoq; habeo magnitudinem auctam ſeu compoſitam juxta illam rationem, quam habet prima ad ſecundam.

Si vero datis tribus magnitudinibus, qvarum prima minor eſt qvam ſecunda, vellem autem tertiam ita dividere, ut portio ad totam haberet eandem rationem quam prima ad ſecundam: exſtruo rurſum triangula ſimilia bina, ut in figura num V. atque inde concludo, ut ſecunda ſeu major magnitudo ad primam minorem, ſic tertia ad quartam, ſeu ad diviſum. Ut in figura numero V. ſi magnitudo AB. eſſet triens

magni-

magnitudinis AE , qværerem vero trientem ipſius DE, conſtructis ut illic triangulis æqviangulis dico ut EA. major magnitudo ad BA. minorem; ſic DE. ad CB. Adeoque DE. magnitudo diviſa eſt in tres partes, & CB ſe habet ad DE. ut BA. ad EA.

Multiplicatio ergo& diviſio eodem plane modo perficitur,tantũ hoc diſcrimine retento, qvod in multiplicatione factũ ſe habeat ad tertium,ut majus ad minus: in diviſione vero, factum ſeu diviſum ſe habeat ad tertium, ut minus ad majus. Operatio quoque in multiplicatione diverſa eſt ab operatione in diviſione. Illic enim pro inveniendo qvæſito eſt,ut minor ad majorem terminum, ſic tertius terminus ad quæſitum. In diviſione autem pro inveniendo diviſo dicimus , ut major terminus ad minorem, ſic tertius ad qvæſitum. Quod utrumque ex priori exemplo liquet. In multiplicatione enim DE. pro invenienda EA. multipla ipſius, erat,ut CB minor terminus ad AB maiorem,ſic DE. ad EA. Factum autem per hanc multiplicationem, nempe EA ad ſuum terminum DE, ſe habet ut major terminus BA ad CB. terminum minorem. In diviſione autem pro invenienda CB. parte ipſius DE. eſt ut EB. major terminus ad BA minorem terminum; ſic DE. ad CB. Diviſum autem CB. ſe habet ad totum DE. ut AB. minor terminus ad AE. majorem terminum.

Quando ergo datis tribus terminis, qværitur quartus, qvi ad tertium terminum eam habeat rationem quam primus ad ſecundum: videndum ſtatim eſt , an

pri-

primus terminus ſit major ſecundo, vel minor. Si major eſt ſecundo, hoc eſt, ſi fuerit ratio exceſſus, tum quartus erit major tertio: adeoque tertius terminus augendus eſt ſeu multiplicandus, fietque ut minor ad majorem, ſic tertius ad quartum. Tum enim qvartus ad tertiũ eandem habebit rationem qvam primus ad ſecundũ. Atque hoc modo in omnibus rationibus exceſſus quęritur ratio æqvalis per multiplicationem. Quod ſi primus terminus ſecundo minor fuerit, tertius terminus dividendus erit, dicendumq; ut major ad minorem, ſic tertius ad qvæſitum. Ita enim qvartus terminus eandem habebit rationem ad tertium qvam primus ad ſecundum. Talique modo ratio æqvalis quæritur cuicunq; rationi defectus. Omnis ergo operatio per qvam qvartus terminus ita qværitur, ut dicatur, ut minor terminus ad majorem, ſic tertius ad qvæſitum, eſt multiplicatio. In qva autem qvartus ita qværitur ut dicatur, ut major terminus ad minorem, ſic tertius ad quæſitum vocatur diviſio. In multiplicatione enim eſt,ut 1. ad 5.ſic 6.ad 30.qvinqvies enim ſena ſunt triginta. In diviſione autem eſt ut 5. ad 1. ſic 30. ad 6. qvinqve enim in triginta habeo ſexies. Quod autem unitas in numeris, id inter magnitudines, minor magnitudo ex duabus eſt. Hac ergo methodo cuicunque rationi datæ alia æqvalis ratio conſtituitur: nempe, ſi ratio fuerit exceſſus; tum multiplicando altera ratio acquiritur. Si vero ratio fuerit defectus, tum dividendo æqvalis huic

con-

constituitur. Quam autem nos æqualem rationem dicimus, eam Euclides similem vocat: qvamvis in rationibus inæqvalibus nomina quantitatis retinuerit, vocando unam majorem, & alteram minorem. Aristoteles vero eadem appellatione usus est, qva nos. Illi enim ratio æqualis dicitur, qvam nos hoc nomine insignivimus. Quod vero Theonem Smyrnæum attinet, is singularem hac in parte sententiam habet. Vocat enim rationem æqvalem, qvam nos æqvalitatis dicimus, & qvam ipsemet alibi λόγον ἰσότητος appellat: majorem vero, qvæ nobis ratio excessus dicitur Græcis λόγος ὑπεροχῆς: oppositam vero huic rationem defectûs vocavit λόγον ἐλάττονα seu rationem minorem. Locus est capite XXII. libri secundi seu de musica, Τῶν δὲ λόγων inqvit οἱ μέν εἰσι μείζονες, οἱ δὲ ἐλάττονες, οἱ δὲ ἴσοι. Ὁ μὲν οὖν ἴσος εἷς καὶ ὁ αὐτὸς λόγος, καὶ προηγεῖται πάντων τῶν λόγων καὶ ἔστι στοιχειώδης. Ἴσοι δὲ εἰσὶν οἱ κατὰ τὴν αὐτὴν ἰσότητα ἐξεταζόμενοι πρὸς ἀλλήλους. οἷον ἓν πρὸς ἕν, καὶ δύο πρὸς δύο, καὶ δέκα πρὸς δέκα, καὶ ἑκατὸν πρὸς ἑκατόν. Τῶν δὲ μειζόνων οἱ μὲν πολλαπλάσιοι, οἱ δὲ ἐπιμόριοι, οἱ δὲ οὐδέτεροι. Ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἐλαττόνων, οἱ μὲν ὑποπολλαπλάσιοι, οἱ δὲ ὑπεπιμόριοι, οἱ δὲ οὐδέτεροι. *Rationum aliæ sunt majores, aliæ minores, aliæ vero æqvales. Æqualis ergo una est & eadem, omnesque rationes præcedit, ac elementi vicem habet. Æqvales*

les autem sunt, quæ eandem inter se æqvalitatem habent, ut unum ad unum, duo ad duo, decem ad decem, centum ad centum. Majorum vero rationum aliæ sunt multiplæ, aliæ superparticulares, aliæ neutræ. Minorum pariter, aliæ sunt submultiplæ, aliæ subsuperparticulares, aliæ neutræ. Ex quibus id sequi videtur qvod antea indicavi, æqvalem rationem Theoni Smyrnæo appellari, quam nos æqvalitatis dicimus, imo qvam ipsemet plurimis in locis λόγον ἰσότητος appellat. Eqvidem, si diceremus numeros ἓν πρὸς ἕν, δύο πρὸς δύο δέκα πρὸς δέκα ἑκατὸν πρὸς ἑκατὸν à Theone tantum notis fuisse indicatos, scriptumq; ά πρὸς ά, καὶ β΄ πρὸς β΄, καὶ ί πρὸς ί. καὶ ϛ.΄ πρὸς. ϛ΄ per que hos numeros qvantitates, intelligendas essenon terminorum invicẽ, sed ipsarum rationum: adeoque integre scribendum οἷον ἓν πρὸς ἓν καὶ διπλάσιον πρὸς διπλάσιον, καὶ δεκαπλάσιον πρὸς δεκαπλάσιον, καὶ ἑκατομπλάσιον πρὸς ἑκατομπλάσιον, *ut unũ ad unũ* (seu simplũ ad simplũ) *duplũ ad duplũ, decuplum ad decuplum, centuplum ad centuplum*; facile hæc Theonis verba cum aliorum Geometrarum mente conciliari possent. Si enim duæ rationes æqvalitatis invicem comparantur: utrinque est ratio unitatis ad unitatem. Ratio autem dupla est æqvalis rationi duplæ, & decupla decuplæ, & centupla centuplæ. Id quoque quod de majoribus rationibus subjungitur, illas esse vel multiplas, vel superparticulares, vel neu-

tras

tras; ſatis commode explicari poſſet: nẽpe ut ratio noncupla vel vigecuploſeptupla &c. eſſet multipla rationis triplæ. illa qvidem dupla vel duplicata, hæc tripla vel triplicata. Sic ratio 81. ad 3. eſt ſeſqvialtera rationis 27. ad 3. & ratio 81. ad 1. eſt ſeſquitertia rationis 27. ad 1. Ratio autem 243. ad 1. collata cum ratione 27. ad 1. neque multipla eſt, neque ſuperparticularis, ſed neutra, & qvidem, juxta priorem methodum eſt ſuperpers. Eodem modo ratio 1. ad 27. eſt ſubtripla rationis 9. ad 27. & 1. ad 81. ſubqvadrupla rationis 27. ad 81. & ſic in cœteris. Sed quæ de harmonicis poſtea ſubjunguntur, cum hac explicatione non videntur convenire poſſe. Quicquid ſit: certum qvidem eſt, Theonem Smyrnæum & alibi placita aliorum Geometrarum non tam accurate fuiſſe ſeqvutum. Cap. enim XXI. libri ſecundi definit ἀναλογίαν, qvamcunque mutuam habitudinem duarum rationum inter ſe. Ἀναλογία δὲ ἐστὶ λόγων, ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις, οἷον ὡς δύο πρὸς ἕν, οὕτως ὀκτὼ πρὸς τέσσαρα. *Analogia autem ſeu proportio, eſt mutua quæcunqve rationum relatio, verbi gratia, ut duo ad unum, ſic octo ad qvatuor.* Exemplum quidem adjunctum veram & Geometricam proportionem monſtrat: ſed definitio nimis eſt generalis. Etenim ſi ἀναλογία eſt mutua quæcunq; rationum relatio λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις, *qvaliſcunq; relatio rationum invicem*: utique cum inter rationes 3 & 1. & 5 ad 2. detur aliqva relatio, et-

iam illic erit ἀναλογία: qvod tamen verum non est. Ἀναλογία enim est qvando rationes eædem vel æqvales fuerint. Ita qvidem bonus hic Theo parum accuratus in scribendo fuisse deprehenditur. Quod autem Marcus Meibomius hunc Theonis Smyrnæi sive errorẽ, sive opinionem, veteribus in genere attribuit, eamq; ob rem, eosdem carpit: id vel imperite admodum, vel maligne ab ipso factum est. Diffiteri qvidem nequit quin inter veteres rerum Geometricarum ac Mathematicarum scriptores, hi vel inter primos sint ponendi, Euclides, Aristarchus Samius, Archimedes, Theodosius Tripolita aliiq;: quos tamen in eadem cum Theone Smyrnæo sententia fuisse, vix ipsemet dixerit. Scripta qvidem eorum testantur, non tam arctis limitibus has voces circumscripsisse, ut solas rationes excessûs majores dicerent, solasq; rationes defectûs minores. Etenim si duæ rationes excessus inæqvales comparentur invicem, unam qvidem majorem dixere, alteram minorem. Sic duarum inæqvalium rationum defectûs, unam qvidem majorem appellarunt, alteram minorem. Verum qvidem est qvamcunque rationem excessus, si cum alia ratione, vel æqvalitatis, vel defectus comparetur, semper esse majorem. Tum qvoq; qvamcunq; rationem defectûs, si cum ratione æqvalitatis aut excessus comparetur, semper esse minorem, qvod plenius postea demonstrabimus. Neqve tamen ideo omnes rationes ex-

cessus

cessus simpliciter loqvendo majores sunt dicendæ; nisi respectu rationis æqvalitatis. Neque omnes rationes defectus simpliciter minores sunt dicendæ; nisi respectu rationis æqvalitatis. Nam ut una ratio excessûs, altera ratione excessus, major est, altera minor: sic eodem modo, duæ rationes defectûs invicem collatæ, unam faciunt altera minorem, alteram vero majorem. Quando ergo ratio æqvalis aut major aut minor dicitur: tum id semper fit respectu alterius rationis. Eqvidem si dicamus Theonem unamqvamq; rationem duplici modo consideraſſe, primo qvidem, ut antecedens ad conseqvens, secundo, ut consequens ad antecedens; aliqvo modo hæc sententia tolerari potest. Nam in rationibus æqvalitatis, ut antecedens ad conseqvens, sic conseqvens ad antecedens. In rationibus vero excessûs, antecedens ad conseqvens majorem rationem habet, qvam conseqvens ad antecedens In rationibus vero defectus, ratio antecedentis ad conseqvens, est minor qvam conseqventis ad antecedens. Id certum est veterum Geometrarum præstantissimos optime novisse qvænam rationes essent æqvales, qvæ majores, qvæ minores. Adeoque mera calumnia est Meibomii, qvi veteres in genere sine omni exceptione accusat, qvod in his appellationibus erraverint. vid. pag. libri ipsius 110. lin. 7. & 8. & confer cum hac paginam qvam illic citat, nempe decimamtertiam.

CAP. VIII.

Explicata methodo inveniendi rationes æqvales tam in rationibus exceſſus, qvam defectûs : nunc illud nobis incumbere videtur, ut quod antea ſumus polliciti, id jam præſtemus, rationumq; conjunctionem, tam componendo, qvam dividendo in medium adferamus. Eſt ergo conjunctio rationum, quando factum ex multiplicatione aut diviſione antecedentis termini, alicujus rationis, per aliam rationem, comparatur cum conſeqvẽte eiuſdem rationis. Ut ſint duæ rationes 7 ad 2. 4 ad 3 .invicẽ conjungẽdæ. Rationi 7 ad 2. qværitur æqvalis quæ ſe habeat ad 4. ut 7 ad 2. dico ergo, ut 2 .ad 7. ſic 4. ad 14. Ratio ergo 14 .ad 3 .eſt compoſita ex rationibus 7. ad 2. & 4. ad 3. Eodem modo, ſi qværatur ratio facta ex rationibus 2. ad 7. & 4. ad 3. dico dividendo, ut 7. ad 2. ſic 4. ad alium $1\frac{1}{7}$. Ratio ergo $1\frac{1}{7}$ ad 3. ſeu 8. ad 21 in integris numeris eſt facta per diviſionem ex rationibus 2 ad 7. & 4. ad 3.

Omnis ergo ratio, qvæ cum alia ratione conjungitur, eſt vel exceſſus, vel defectus. Si ratio fuerit exceſſus, tum per multiplicationem factum invenitur. Si autem ratio fuerit defectus perdiviſionem. Atque illic qvidem factum erit maius, utpote compoſitũ: heic vero factum erit minus, utpote diviſum. Quod exemplis ac demonſtratione oculari melius percipitur. Tres autem omninò caſus ſunt, qvi in hac conjunctione conſiderantur. Etenim vel

duæ

duæ rationes exceſſus conjunguntur invicem, vel duæ rationes defectûs, vel una ratio exceſſûs altera defectus. Si ambæ rationes exceſſûs fuerint; multiplicando productum augetur:adeoq;, ratio compoſita fit major rationibus componentibus. Si ambæ rationes fuerint defectûs : tum una ratio alteram dividit: ratioq; diviſa, utraqve ratione,nempe & dividente & dividenda, minor eſt. Deniqve ſi una ratio fuerit exceſſûs, altera defectûs: tum ratio exceſſus, diviſa per rationem defectûs, dabit factum ſeu productum, minus qvidem ratione exceſſûs, majus vero ratione defectûs. Sit in figura num. VI. ratio A ad B conjungenda rationi C ad D. utraq; qvidem ratio eſt exceſſûs, A enim excedit B. & C excedit D. qværo ergo alium terminum nempe E. qvi qvidem ſe habeat ad C. ut A ad B. Quoniam ergo qværitur ratio E ad C. æqvalis rationi A ad B. inveſtigatur qvidem ille in lineis per multiplicationem: eritq;, ut B ad A. ſic C ad E. vel conſtructis binis triangulis æqviangulis, factaque IB æqvali rectæ B, & IC. æqvali rectæ C, denique BA æqvali rectæ A: erit multiplicando, ut minor terminus IB. ſeu B, ad majorem BA ſeu A; ſic IC ſeu C. ad CE vel E. adeoqve ut ſe habet AB ad BI. hoc eſt A ad B;ſic ſe habet EC ad CI. vel E ad C. Ratio ergo E ad D. eſt facta per conjunctionem duarum rationum exceſſûs, A ad B, & C ad D. idque inveniendo per multiplicationem terminum E, & rationem E ad C. æqvalem rationi A ad B.

In omnibus ergo magnitudinibus, qvando duæ rationes excessûs invicem conjunguntur; tum terminus ille qui cum conseqvente alterius rationis, ut cum suo proprio conseqvente comparatus, dat rationem conjunctam seu compositam, seu qvi ad antecedentem terminum unius rationis se habet, ut antecedens alterius rationis ad suum conseqvens; invenitur per multiplicationem. Adeoque ratio composita ex binis rationibus excessûs, est major utraq; ratione, ex qva componitur.

Quando autem duæ rationes defectus conjunguntur invicem, ita ut faciant aliam rationem: tum una ratio dividit aliam, adeoq; factum seu productum minus est eo ex qvo fit. Sit in fig. num VI. ratio B ad A defectûs, & D ad C. etiã defectus, qværo terminum qvi se habeat ad D. ut B ad A. hoc est qværo rationem ex binis hisce rationibus factam seu enatam. Qvoniam autẽ terminus qvi investigatur se habet ad D. ut B ad A ratio autem BA. sit defectus, ergo ratio huic æqvalis investigatur per divisionem. ut Capite VII. demonstratum est. Unde dico ut A ad B sic D ad qvartum seu minus. vel constructis binis triangulis æqviangulis fig. num. VII. nempe ABC & ADE. est ut AB. hoc est A, ad BC. hoc est B; sic AD seu D, ad DE seu E. Adeoq; terminus qvæsitus E se habet ad D, ut B ad A. Inventus autem est hic terminus per divisionem. ratio ergo D ad C. dividitur per rationem B ad A. in rationem E ad C. adeoque dividenda ratio est D ad C. di-

videns

videns ratio eſt B ad A. & diviſa ſeu facta eſt E ad G. Quando ergo duæ rationes defectus aliam faciunt rationem, ratio qvæ inde enaſcitur eſt, diviſa, hoc eſt, facta ex diviſione unius rationis per aliam.

Atq; hoc in magnitudinibus ſatis liquet. Quod autem etiam in numeris eodem modo ſe habeat, ex rationibus effabilibus demonſtratur. Sint ergo duæ rationes exceſſus invicem componendæ 7 ad 2. & 4 ad 3. hoc eſt, in magnitudinibus, ſit in fig. num. VIII. A. ſeptem partium talium, qvalium B. eſt duarum: C. vero talium quatuor, qvalium D. eſt trium. Quæro per priora rationem compoſitam ex hiſce binis, hoc eſt, qværo terminum E. qvæ ſe habeat ad C. ut A ad B. tum enim ratio E ad D. erit facta ex ratione C. ad D. per rationem A ad B. Quoniam vero ratio A ad B. eſt exceſſus, ergo æqvalis huic rationi invenietur per multiplicationem; ut capite VI. dictum fuit: exſtructisq; ſimilibus triangulis, erit, ut B ad A. ſic C ad E. Adeoque ratio E ad C. erit æqvalis rationi A ad B: ratio autem E ad D. compoſita ex binis rationibus A. ad B. & C. ad D. In numeris ergo idem obtinebimus. Quæratur enim ratio æqvalis rationi 7 ad 2. dato conſeqvente 4. ſeu, qværatur numerus, qvi ſe habeat ad 4. ut 7 ad 2. erit ut 2 ad 7. ſic 4 ad qvæſitum 14. Adeoque 14 ſe habet ad 4. ut 7 ad 2. Ratio autem 14 ad 3. eſt compoſita ex ratione 7 ad 2. &

4 ad 3. In rationibus autem defectus, methodus est inversa, sicut etiam in magnitudinibus. Si enim qværatur ratio facta ex binis rationibus 2 ad 7. & 3 ad 4: qværitur terminus qvi se habeat ad 3. ut 2 ad 7. Hoc autem fit dividendo. Sit enim in figura num. VIII. B. duarum partium talium, qvalium A est septem. D vero talium trium, qvalium C est qvatuor. Ratio ergo B ad A, & $\frac{2}{7}$: & ratio D ad C. est $\frac{3}{4}$. Divide B. eo modo, ut divisum ad totum, se habeat, ut D ad C. Hoc est secta B. in qvatuor partes æqvales EF. FG. GH. HI. erit EH. talium trium partium, qvalium tota EI. hoc est B. est qvatuor: adeoq; EH. se habet ad B. ut D ad C. Qvalium autem B. fuerit 4, talium A. erit 14. adeoque ratio EH. facta dividendo ex ratione B ad A. per rationem D ad C. erit ut 3 ad 14.

Adeoq; liquet rationem factam ex binis rationibus excessus semper esse compositam, ideoque majorem partibus componentibus: factam vero ex binis rationibus defectus, semper esse divisam. In rationibus enim excessus, antecedens unius rationis augetur eo modo, ut auctum ad primum, eandem habeat rationem, qvam antecedens alterius rationis ad suum conseqvens. In rationibus autem defectus antecedens unius rationis eo modo dividitur, ut divisum ad totum, eam habeat rationem, qvam antecedens alterius rationis ad suum conseqvens. Atque ex hoc fundamento Euclides à priori demóstravit propositio-

nem

nem XXIII. libri VI. Elementorum, ubi in æqviangulis parallelogrammis monſtrat hanc rationem factam ex binis aliis: qvam qvidem Propoſitionem ipſemet Meibomius nuſquam falſi accuſat, tantum ait, illam ab aliis Geometris non fuiſſe intellectam, idque ob hanc ſolam cauſam, qvod rationum ineffabilium compoſitionem hinc demonſtrari poſſe ignoraverint. Sed de hac Meibomii falſitate poſtmodum. Nunc illud tantum indicare volui, Euclidem ea omnia qvæ hucuſque de compoſitione & diviſione rationum demonſtravi, ſimpliciter ut principium ſupponere, ad propoſitionem prædictam. Demonſtrationem integram adſcribam ut benevolus Lector, eo melius de tota re judicare poſſit. Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ. ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ. λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦτε ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς Λ· ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Μ. Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ, καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Ἀλλ' ὁ τῆς K πρὸς τὴν M λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς K πρὸς τὴν Λ λόγου, καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς τὴν M. ὥστε καὶ ἡ K πρὸς τὴν M λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΓH, οὕτως τὸ AΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ. Ἀλλ' ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΓH, οὕτως ἡ K πρὸς τὴν Λ. Καὶ ὡς ἄρα ἡ K πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ AΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓE οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓZ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔE πρὸς τὴν ΓE οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν M. καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν M, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓZ παραλληλόγραμμον, Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ K πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ AΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν M, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓZ· δι' ἴσου ἄρα ἐστιν, ὡς ἡ K πρὸς τὴν M, οὕτως τὸ AΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓZ. Ἡ δὲ K πρὸς τὴν M λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ τὸ AΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓZ. λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Sint in figura num. IX. *æquiangula parallelogramma* AΓ *&* ΓZ *in qvibus angulus* BΓΔ *unius parallelogrammi, æqvalis sit angulo* EΓH *alterius parallelogrammi: dico qvod* AΓ *parallelogrammum ad* ΓZ *parallelogrammum rationem habeat conjunctam seu factam ex lateribus; nempe ex ratione qvam habet* BΓ *ad* ΓH, *& qvam habet* ΔΓ *ad* ΓE, *Jaceant enim* BΓ *in directum ipsi* ΓH. *Recta ergo* ΔΓ *etiam in directum jacebit ipsi* ΓE (per propositi-
onem

onem XIIII. I. Elem. Sunt enim anguli ΔΓΗ & ΗΓΕ æqvales duobus rectis). *Compleatur* ΔΗ *parallelogrammum ; & ſit aliqva recta, nempe K. fiatque ut* ΒΓ *ad* ΓΗ *ſic* Κ *ad* Λ. *Ut vero* ΔΓ *ad* ΓΕ. *ſic* Λ *ad* Μ. *Rationes ergo* Κ *ad* Λ, *&* Λ *ad* Μ *eædem ſunt, qvæ rationes laterum, nempe* ΒΓ *ad* ΓΗ, *&* ΔΓ *ad* ΓΕ. *Sed ratio* Κ *ad* Μ *facta eſt ex ratione* Κ *ad* Λ, *&* Λ *ad* Μ, *ita ut ratio* Κ *ad* Μ *rationem habeat factam ex lateribus. Et qvoniam eſt, ut* ΒΓ *ad* ΓΗ, *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΘ *parallelogrammum ; ſed ut* ΒΓ *ad* ΓΗ, *ſic* Κ *ad* Λ: *erit ergo ut* Κ *ad* Λ, *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΘ *parallelogrammum. Rurſum qvoniam eſt, ut* ΔΓ *ad* ΕΓ, *ſic* ΓΘ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum. Sed ut recta* ΔΓ *ad rectam* ΓΕ, *ſic* Λ. *ad* Μ. *Erit ergo ut* Λ *ad* Μ. *ſic* ΓΘ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum. Qvoniam vero demonſtratum eſt, ut* Κ *ad* Λ, *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΘ *parallelogrammum* (per I. propoſ. libri VI.) *ſicut vero* Λ *ad* Μ, *ſic* ΓΘ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum* : *ex æqvo ergo erit, ut* Κ *ad* Μ. *ſic* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum.* Κ *autem ad* Μ. *habet rationem factam ex lateribus. Ergo &* ΑΓ *parallelogrammum ad* ΓΖ *parallelogrammum rationem habebit factam ex lateribus.* Hæc eſt tota ratio demonſtrationis Euclideæ: ex qva liqvet auctorem id ſupponere qvod nos hucuſque propoſuimus, factam nempe rationem illam eſſe, qvæ eſt, inter terminum multiplicatione aut diviſione inventum, & conſeqvens unius rationis. Ut verbi gratia: ſi Α

si Λ æqvetur ipsi ΔΓ & Μ ipsi ΓΕ, adeoque Λ ad Μ. sit æqvalis rationi ΛΓ ad ΓΕ. pro invenienda ratione facta ex ΒΓ ad ΓΗ & Λ ad Μ. dico juxta nostram methodum ut ΓΗ ad ΒΓ, sic Λ ad Κ. Habet ergo Κ ad Λ eandem rationem qvam ΒΓ ad ΓΗ. adeoque Κ est terminus qvæsitus, qvi cum Μ comparatus dat rationem factam ex rationibus ΒΓ ad ΓΗ & ΔΓ ad ΓΕ. plane ut prius. Hoc ergo supponit Euclides, neque ullo modo explicat, qvod forte Meibomio causa erroris fuit. Nos autem demonstramus, & rem se ita habere; & tamen alias esse rationes compositas, eas nempe qvæ per multiplicationem investigantur, & alias rationes divisas, qvæ per divisionem.

Quod autem vocem συγκείμενον exposuerimus per factam, ejus qvidem rei hanc causam habuimus. Quoniam enim majus qvidem parallelogrammum ad minus in rationibus excessus, compositam habeat rationem ex ratione laterum; minus vero, rationem divisam: ideo pro voce συγκείμενον, posuimus factam, qvæ & compositioni per multiplicationem, & divisioni convenit. An vero Euclides eo sensu hanc vocem usurpaverit, id pro certo non affirmaverim. Qvamvis enim Euclides hoc modo à crimine negligentiæ liberari possit, qvasi ipsam qvoque rationum divisionem hoc verbo comprehendisset; qvod & capite VI. pag. 103. à nobis tentatum fuit: tamen si accurate omnia sunt examinanda, vereor ne hoc minus

cer-

certum deprehendatur. Dicendum potius eſt, ipſum non magis in hac propoſitione XXIII. libri VI. diviſionis rationum meminiſſe; qvam in definitionibus: adeoque ſolam rationum compoſitionum ipſi fuiſſe traditam, quod exiſtimaret, contrariorum contrariam eſſe ſcientiam. Ipſæ enim voces συγκεῖσθαι & συντίθεσθαι apud Euclidem eandem rem denotare videntur, ut ex propoſitionibus XVII. & XVIII. libri V. Elementor. liqvet. Libro qvidem VI. Elementorum definitione ultima, dat nobis compoſitionis rationum talem definitionem. Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσι τινά. *Ratio ex rationibus componi dicitur, qvando duarum rationum qvantitates invicem multiplicatæ faciunt aliam.* Legendum omnino cum antiqvis τινὰ pro τινας. Quid autem πηλικότης rationum ſit, aut qvomodo debeat multiplicari, id minime indicat. Eqvidem ſi per multiplicationem qvantitatum rationum illam intelligit, qva antecedentia invicem, & conſeqventia invicem multiplicantur: dubium non eſt: qvin ipſa qvoqve rationum diviſio, ſub hac definitione comprehendi poſſit. Sit enim ratio ΕΓ ad ΓΔ in figura num. IX. defectûs, & ratio ΗΓ ad ΓΒ etiam defectus: utraque autem ſit effabilis, ac prior qvidem, ut 2 ad 7. altera vero, ut 3 ad 4. Si ergo factam ex hiſce rationibus aliam velim, divido unam

ratio-

rationem per aliam. Sit itaq; in figura numero X. ut ΒΓ ad ΓΗ, ſic ΓΕ ad ΗΝ. vel in nnmeris, ut 7 ad 2. ſic 3. ad $\frac{6}{7}$. vel qvod idem eſt, ſic 21 ad 6. poſita nempe pro ratione 3 ad 4. ratione 21 ad 28. qvæ huic eſt æqvalis. ratio ergo facta ex prioribus eſt 6 ad 28. ſeu 3 ad 14. Sed eadem ratio per multiplicationem antecedentium invicem & conſeqventium invicem inveſtigatur. Bis terna enim ſunt ſex & qvatuor ſeptena 28. Unde ratio facta eſt ſex ad 28. vel 3 ad 14.

Hoc ipſum in rationibus ineffabilibus locum habet. Sint enim rationes ΓΕ ad ΓΔ & ΗΓ ad ΓΒ ambæ ineffabiles & defectus: qværo ex iis rationem factam. Cum autem compertum ſit ambas eſſe rationes defectûs, ergo qvarta qværitur per diviſionem. Unde eſt in figura num. X. ut ΒΓ ad ΓΗ. ſic ΒΕ qvæ eſt ΓΕ ad ΗΝ. Ratio ergo ΗΝ ad ΓΔ eſt facta ex ratione ΕΓ ad ΓΔ diviſa per rationem ΗΓ ad ΒΓ. ſicut capite VII. demonſtratum eſt. At vero multiplicando antecedentia harum rationum invicem & conſeqventia invicem, eadem ratio facta inveſtigatur. Conſtructis enim binis parallelogrammis æqviangulis ΑΓ & ΓΖ. junctisq; circa æqvalem angulum; ita ut ΗΓ in directum jaceat ipſi ΓΒ, & ΕΓ ipſi ΓΔ: clauſoqve parallelogrammo ΔΓΗΘ. dico parallelogrammum ΖΓ habere ad parallelogrammum ΓΑ rationem factam ex diviſione rationis laterum ΕΓ ad ΓΔ, per rationem laterum ΓΗ ad ΓΒ. Dividatur enim ratio ΗΓ ad ΓΒ per rationem ΕΓ ad ΓΔ, modo antea explicato; hoc eſt, dicatur, ut ΓΔ ad ΓΕ, ſic ΗΓ ad ΓΝ. ſump-

sumptaque æqvali ΓΝ in linea ΓΒ exstructoque parallelogrammo æqviangulo, ducta parallela ΝΑ ipsi ΑΒ vel ΓΔ; erunt parallelogramma ΑΓ & ΓΖ æqvalia: eritq; ut ΓΔ ad ΓΕ, sic ΔΗ ad ΓΖ. sed ut ΔΓ ΓΕ, sic ΓΗ ad ΓΝ. ergo ut ΔΗ ad ΓΖ, sic ΗΓ ad ΓΝ. hoc est ΗΔ ad ΑΓ. Eandem ergo rationem habet ΗΔ ad ΓΖ qvam ad ΑΓ. Quæ autem ad idem eandem habent rationem, inter se sunt æqvalia. Unde rursum ΓΖ ad ΑΓ eandem habebit rationem, qvam ΑΓ ad ΑΓ. Habet vero ΑΓ ad ΑΓ eam rationem, qvam ΝΓ ad ΓΒ. hoc est rationem factam ex divisione rationis laterum ΗΓ ad ΓΒ per rationem laterum ΕΓ ad ΓΔ. Ratio ergo ΓΖ ad ΓΑ est facta ex divisione rationum laterum invicem: idque per multiplicationem antecedentium invicem, & conseqventium invicem. Quando enim ex binis lateribus exstruitur parallelogrammum: tum latera invicem sunt multiplicata. Adeoque ex hac ipsa figura demonstratur, qva ratione, eadem plane methodo, & in Arithmeticis & Geometricis ratio facta ex binis aliis rationibus investigatur: nempe per multiplicationem antecedentium inter se, & consequentium inter se; in omni collatione rationum, tam excessus invicem, qvam defectus. Id qvoque ex hoc Theoremate liqvet, quo modo, in magnitudinibus ratio quæcunque facta ex binis qvibuscunq; rationibus per multiplicationem terminorum invicem, in lineis inveniatur & exhibeatur. Ratio enim ΒΓ ad ΓΝ est facta ex binis rationibus excessûs, ΒΓ ad ΓΗ, & ΔΓ ad ΕΓ, per multiplicationem ambo-

 borum

borum terminorum invicem. Habet enim parallelogrammum ΔΓ ad parallelogrammum ΓZ rationem factam ex binis rationibus excesſûs BΓ ad ΓH, & ΔΓ ad ΓE. At ratio ΔH ad HE ſeu ΓZ, eſt eadem qvæ ΔΓ ad ΓE, hoc eſt qvæ HΓ ad ΓN. Parallelogramma ergo AΓ & ΓZ ſunt æqvalia. unde ut AΓ ad ΓZ, ſic AΓ ad ΛΓ. adeoque ratio AΓ ad ΛΓ erit facta ex ratione BΓ ad ΓH, & ΔΓ ad ΓE. Unde & BΓ ad ΓN, qvæ eſt eadem, qvæ AΓ ad ΛΓ erit facta ex rationibus BΓ ad ΓH, & ΔΓ ad ΓE. Adeoque in omnibus rationibus, tam excesſûs, qvam defectûs, ratio facta eodem modo, & in Geometricis, & Arithmeticis inveſtigatur; nempe per multiplicationem amborum terminorum invicem. Id autem ideo contingit, qvod in utraque ratione tam exceſſus qvam defectus, iidem utrobique ſint termini: hoc tantum diſcrimine, qvod antecedentia rationum excesſûs ſint conſeqventia rationum defectus: & vice verſa, conſeqventia rationum defectus, ſint antecedentia rationum exceſſus: unde per multiplicationem antecedentium invicem, & conſeqventium invicem, tam in rationibus defectûs, qvam excesſûs, ratio facta inveſtigatur. In rationibus enim exceſſus 2 ad 1. & 4 ad 3. ſi antecedentia 2. & 4. fiant conſequentia, & conſequentia 1. & 3. fiant antecedentia; ut ſit, 1 ad 2. & 3 ad 4. jam duæ hæ rationes ſunt defectûs: unde factum ex utrisque rationibus tam excesſûs, qvam defectûs eodem modo colligitur: ita tamen ut antecedens in rationibus excesſûs, ſit conſequens in rationibus defectûs. bis qvater-

na e-

na enim ſunt 8. ſemel terna ſunt 3 unde ratio facta ex rationibus exceſsûs, eſt 8 ad 3. ratio autem 3 ad 8. eſt ratio facta ex rationibus defectûs. Nemo tamen dixerit rationem 3 ad 8. eſſe compoſitam ex rationibus 1 ad 2. & 3 ad 4. Neque enim compoſitum minus eſt iis unde componitur. Rationem autem 3 ad 8. minorem eſſe ratione 1 ad 2. vel ratione 3 ad 4, & ex Euclide conſtat, & verum eſſe id ipſum poſtea contra Meibomium clariſſime ac certiſſime monſtrabimus. Si ergo ex Euclide aliqvis contenderit, rationes omnes tam exceſsûs qvam defectûs invicem eodem modo componi, eo qvod facta ratio; tam ex compoſitione rationum exceſsûs, qvam diviſione rationum defectus, per multiplicationem τ̃ πηλικοτήτων eodem modo inveſtigetur; id autē ab Euclide compoſitio vocetur: reſpondeo Euclidem aliter explicari poſſe. Videtur enim in hac definitione ſolam rationum exceſsûs compoſitionem tradere voluiſſe. De diviſione autem, & ratione facta ex binis rationibus defectus nullum verbum feciſſe. Nam & alibi neceſſariarum rerum definitiones omittit. Rationem enim minorem nuſqvam definit. Tum ipſius qvoqve majoris rationis definitio, potius eſt theorema aliqvod demonſtratione ſatis ampla indigens, qvam definitio. Dici quoq; poteſt Euclidem voce συγκεῖσθαι latè ut loqvuntur in Scholis fuiſſe uſum, pro omni conjunctione qva ex duobus unum fit, tam multipli-

cando, quam dividendo, quam explicationem ſuperius etiam indicavimus capite VII. pag. 203. Quod ſi neutra hæc explicatio ipſi ſatisfecerit: neque aliam commodiorem ipſe invenerit, qva Euclides excuſari poſſit: per me hac in parte Euclidem accuſet ignorantiæ, & quod inter diviſiones rationum, & earundem compoſitiones non accuratè diſtinxerit, neque has res plene ac diſtinctè tradiderit. Neq; enim mihi propoſitum eſt, negligentiam Euclideam defendere; ſed veritatem in omnibus tutari. Qvod ſi ergo Marcus Meibomius ab hoc capite accuſationem contra Euclidem inſtituiſſet; me ſibi contrarium non habuiſſet. Nunc cum vera & manifeſta falſi arguere conetur; exploſione dignus eſt.

Tertius autem caſus eſt, qvando ratio qværitur facta ex ratione exceſſûs per rationem defectus, vel ratione defectus per rationem exceſſus: qvæ qvidem ratio & multiplicando, & dividendo inveſtigatur. Si enim ratio defectus multiplicetur per rationem exceſſus; vel ſi ratio exceſſus dividatur per rationem defectus: eadem oritur ratio facta. Quæratur enim ratio facta ex rationibus 8 ad 3. & 2 ad 5. Fiat multiplicando ut 8 ad 3. ſic alius ad 2, hoc eſt ut 3 ad 8. ſic 2 ad $5\frac{1}{3}$ hoc eſt, ſic 6 ad 16. Ratio ergo $5\frac{1}{3}$ ad 5. ſeu in integris numeris 16. ad 15. eſt facta multiplicando ex ratione 2 ad 5. per rationem 8. ad 3.

Rurſum fiat dividendo, ut 5 ad 2. ſic 8 ad $3\frac{1}{5}$. Ratio-

tio ergo 3$\frac{1}{5}$ ad 3, ſeu 16 ad 15. eſt facta ex ratione 8 ad 3 diviſa per rationem 2 ad 5. Reſpectu ergo rationis defectus facta ratio compoſita dici poteſt: reſpectu autem rationis exceſſus, diviſa. Si tamen accuratè loqvi velimus, ratio diviſa dicitur. In diviſione enim fieri poteſt, ut diviſum ſit majus diviſiore. Sed in compoſitione fieri nequit, ut compoſitum ſit minus componente.

Ut ergo breviſſimè totam rem abſolvam, totamque factarum rationum naturam Lectori ob oculos ponam, dico omnes rationes vel eſſe integri ad integrum, ſeu totius ad totum: vel totius ad partem: vel partis ad totum. Nempe ratio æqualitatis eſt integri ad integrum, vel totius ad totum: neuter enim terminus alterius, vel pars eſt, vel totum. Ratio autem exceſſus eſt totius ad partem. Omnis enim magnitudo major continet minorem magnitudinem in ſe. Adeoq; minor magnitudo majoris magnitudinis pars eſt: & major minoris totum, unde ratio eſt totius ad ad partem. In rationibus vero defectus ratio eſt partis ad totum. minor enim magnitudo eſt pars majoris, quod contineatur in majore, non ſecus ac manus eſt pars corporis. Facta autem ratio eſt, qvando binis rationibus datis, inveſtigatur terminus, qvi ad antecedens unius rationis ſe habeat, ut antecedens alterius rationis ad ſuum conſeqvens. Ratio autem termini hujus ad conſequens prius, eſt ratio facta ex binis datis rationibus. Unde in rationibus exceſſus cum ra-

tio facta ſit termini qvarti ad conſequens, qvi qvidem terminus eſt ad antecedentem ejus rationis, ut totum ad partem: debet ergo terminus eſſe major antecedente, adeoque ratio ipſa augeri. In rationibus autem defectus, terminus qvæſitus debet eſſe pars antecedentis, ſicut alterum antecedens eſt pars ſui conſeqventis. At vero partem alicujus rei minorem ad aliud habere rationem, qvam ſuum totum; id communi notione verum deprehenditur: majorem vero rationem habere partem ad aliud, qvam ſuum totum; id plane abſurdum eſt.

CAP. X.

Ut autem omnia & ſingula, qvæ hactenus de compoſitione & diviſione rationum dicta ſunt, rectius intelligantur: hoc capite de ſingulis momentis iterum paucis dicemus. Fit ergo omnis rationum compoſitio, vel per additionem, vel per multiplicationem: omnis autem diviſio, vel per ſubtractionem, vel per diviſionem ſigillatim ita appellatam. Eſt autem additio rationum, qvando duabus rationibus ad idem conſeqvens reductis, ambo antecedentia adjecta invicem faciunt unum antecedens, qvod cum priori conſeqvente comparatur.

Multiplicatio autem rationum in magnitudinibus eſt, qvando antecedens unius rationis per alterius rationis antecedens multiplicatum, dat aliud antecedens, qvod cum priori conſeqvente cõparatur.

Sub-

Subtractio rationum eſt, cum binis rationibus ad idem conſeqvens reductis minus antecedens à majore aufertur, aliudque relinqvit antecedens, qvod cum priori conſeqvente comparatur.

Diviſio rationum in magnitudinibus eſt, qvando antecdens unius rationis per alterius rationis antecedens diviſum, dat aliud antecedens, qvod cum priori conſeqvente comparatur.

Singula jam exemplis ſunt illuſtranda. Sit ergo ratio 4 ad 3. addenda rationi 7 ad 5. reductis ambabus rationibus ad eundem terminum conſeqventem, ita ut pro ratione 7 ad 5. ponatur ratio 21 ad 15. qvæ huic eſt æqvalis: pro ratione autem 4 ad 3. ponatur 20 ad 15. qvæ etiam huic eſt æqvalis. Additis invicem 20. & 21. prodit ratio 41. ad 15. facta ex additione rationum 21 ad 15. hoc eſt 7 ad 5. &, 20 ad 15. hoc eſt 4. ad 3.

Eodem modo ſi qværatur ratio facta ex additione rationum 3 ad 4. & 5 ad 7. hoc eſt 21 ad 28. & 20 ad 28. prodit ratio 41. ad 28. Sic ratio 3 ad 4. addita rationi 7. ad 5. dat rationem factam ex additione 43 ad 20.

Uſus autem hujus additionis in Mechanicis atque in omni hominum vita qvam maximus eſt. Atq; ut exemplis aliqvot hoc Lectori ob oculos ponatur, ſit primo in Mechanicis, ſaxum oblongum à terra elevandum plauſtroque imponendum ABCDEF fig. no. vectis XI autem GH movens in H. & vectis IK movens in K. Sit autem

autem momentum GH minus pondere toto, ſitque ratio moventis GH ad movendum BACDFE ut 3 ad 4. Huic autē æqvalis ſit ratio moventis IK ad motum BACDFE Si igitur velim ſcire rationem compoſitam ex hiſce binis rationibus, hoc eſt, rationem, qvam ambo moventia ad motum corpus habent: vel, ſi eodem tempore, binis vectibus ſaxum æqvaliter elevetur; qvænā tum ratio ſit moventis ad motum: addo antecedentia invicem, adeoque pronuncio rationem moventis ad motum, compoſitam ex binis rationibus moventibus, eſſe ut 6 ad 4. Et rationem moventis ad motum vere eſſe, ut 6. ad 4. vel 3 ad 2. hoc eſt ſeſqvialteram, manifeſte liqvet. Quod ſi pro additione rationum altera heic compoſitione uti vellem, qvæ fit multiplicando; falſum concluderem, neqve veram rationem moventis ad motum inveſtigarem. Si enim vulgari modo procederem, multiplicando antecedentia invicem, & conſeqventia invicem, facta ratio eſſet 9 ad 16. qvæ plurimum differt à ratione 3 ad 2. ſeu ſeſqvialtera. Sive debito hæc modo componerem, invertendo poſteriorem rationem, cum alias compoſitio in hiſce rationibus fieri neqveat, & poſtea multiplicando unum antecedens per aliud, dicendo, ut conſeqvens unius ad ſuum antecedens, ſic antecedens ad qvartum: ratio facta eſſet $5\frac{1}{3}$ ad 3. ſeu 16 ad 9. qvæ etiam à vera plurimum differt. Hæc ergo rationum compoſitio, qvæ fit per additionem, non minorem utilitatem in rebus habet,

habet, qvam altera illa, qvæ multiplicando investigatur. Et æqvè, rationum compositio est, dicenda: cum ratio ex binis hisce rationibus verè sit facta. Duæ enim rationes, 3 ad 4, & 3 ad 4, qvæ sunt moventis ad id qvod movetur, verè conjunguntur invicem: & ratio ex his facta, verè est 6 ad 4, seu 3 ad 2.

In omni autem additione, vel eædem rationes adduntur invicem, vel dissimiles. Tum qvoque, vel semel adduntur invicem, vel sæpius. Quando eædem rationes semel adduntur invicem, fit duplatio: & ratio facta, vocatur à Geometris, alterius rationis dupla. Atq; hoc modo, ratio 3 ad 2, seu 6 ad 4. est dupla rationis 3 ad 4. Duæ enim eædem rationes, 3 ad 4 & 3 ad 4 semel invicem adduntur: unde fit ratio 6 ad 4. qvæ est dupla rationis 3 ad 4. Si enim, in fig. num. XII. duæ æqvales magnitudines AB. & BC invicem addantur: facta AC erit dupla ipsius AB. Ita etiam, juxta hanc analogiam, Geometræ, rationem, factam ex binis rationibus æqvalibus, semel additis, duplam vocarunt. Cui etiam appellationi, ipsa rerum veritas assentitur. Momentum enim, cujus ratio, ad id qvod movetur, est 6 ad 4, vere duplum est illius momenti, cujus ratio, ad id qvod movetur, est 3 ad 4. Si enim momentum HG, in figura XI. facile movet BACDLMN semissem ipsius ABCDEF: etiam momentum IK facile movebit semissem LMNFE. adeoque, si ambo momenta simul agant; facile movebunt totum ABCDEF. hoc est, duplum ipsius BACDLM. Adoe-

qve ratio duorum momentorum GH & IF, ad totum ABCDFE. eſt dupla rationis HG. ad idem ABCDEF. Quando vero, duæ magnitudines inæqvales adduntur; tum compoſita magnitudo, diverſam, ad componentia membra, rationem habet. Si enim in fig. XII. AB ſit 4 partium, Bc 2 partium, tota *A*c. erit qvidem tripla ipſius Bc, ſeſqvialtera autem ipſius AB. Quod ipſum, in hac qvoque rationum compoſitione, quæ fit per additionem, venit obſervandum. Si enim ratio momenti GH, ad ABCDEF. in ſuperiori diagrammate XI, fuerit ut 4. ad 2; ratio autem momenti IK, fuerit ut 8 ad 2: erit ratio compoſita 12 ad 2. hoc eſt ſextupla: quæ qvidem rationis 4 ad 2. hoc eſt, 2 ad 1, eſt tripla, rationis autem 8 ad 2, ſeu 4 ad 1, eſt ſeſqvialtera. & ſic in cœteris omnibus.

Porro ſi rationibus binis æqvalibus invicem additis, aggregato harum, æqvalis ratio addatur: facta ratio, tripla dicitur, rationis primæ. & ſi hujus aggregato, eadem ratio tertium addatur; facta ratio, qvadrupla dicitur rationis primæ. & ſic qvintupla, ſextupla, & porro in infinitum.

Hujus etiam uſus in Mechanicis eſt demonſtrandus. Sit in fig. num. XIII. obeliſcus ABC erigendus ſuper ſtylobatam FGEDHI. Sint vero ergatæ ſex α.β.γ.δ.ε.ζ. omnes æqvalium virium inter ſe. Sit porro ratio ergatæ α, ad pondus obeliſci ABC, ut 7 ad 50. Ratio ergo ergatæ β, ad pondus obeliſci ABC. erit etiam, ut 7. ad 50, & ſingularum ergatarum ratio, ad totum pon-

pondus, ut 7 ad 56. Si vero duæ ergatæ ſimul agant, qværatur vero ratio moventis ad totum pondus: componantur duæ rationes, 7 ad 50. & 7 ad 50, invicem addendo: prodit ratio 14 ad 50: quæ etiam vera eſt ratio, duarum ergatarum, ad totum pondus. Unde ratio, 14 ad 50, eſt dupla rationis, 7 ad 50. Rurſum ſi ratio trium ergatarum, ad totum pondus qværatur; addantur tres rationes 7 ad 50 invicem, modo antea indicato: vel multiplicetur 7 per ternarium; eadem enim ſumma erit, nempe ratio 21 ad 50, qvæ etiam eſt vera ratio trium ergatarum ad totum pondus. Tres vero æqvales ergatas, triplam, ad totum pondus, rationem habere, rationis, unius ergatæ ad totum pondus, nemo ſanus negabit; cum triplam operationem habeat, & triplo magis moveat: adeoq; ratio moventis ſit tripla. Hoc modo, ſi ſex ergatarum rationes componantur: erit ratio moventis, ad id qvod movetur, ut 42 ad 50. qvæ qvidem eſt ſextupla rationis 7 ad 50. At vero in omni motu, ratio moventis ad motum, omnino erit ratio exceſsûs. Si enim æqvalitatis fuerit, reſiſtentia rei movendæ, æqvalis erit impulſioni moventis: adeoque nullus motus fiet. Sin ratio defectus: major erit movendæ reſiſtentia, qvam moventis impulſio. unde multo minus, tunc ullus motus fiet. Addatur ergo, ratio unius pluriumve ergatarum, uſquedum, ratio moventis ad motum, fuerit exceſsûs. Si ergo unius adhuc ergatę, nempe, 7/50 ratio, cum ſuperioribus componatur; erit ratio mo-

ventis ad movendum, ut 49 ad 50. duarum vero ergatarum rationibus, priori rationi, additis: erit ratio moventis ad movendum, ut 56 ad 50. qvæ qvidem ratio, est octupla, rationis 7 ad 50.

Atque ex his liqvet, qvid ratio dupla, tripla, octupla, hoc in sensu sit: & qvam bene, hæc nomenclatura huic rei conveniat. Idipsum quoque, quod heic maxime demonstratum cupimus, hinc clarissime liquet: rationes ipsas, addendo verè componi atque augeri.

Est quidem, alia quædam in mistis compositio, qvæ, additione antecedentium & consequentium, peragi videtur: quæ tamen, proprie, compositio rationum non est. Si enim, eædem, vel æqvales rationes, invicem, eo modo, addantur, semper, ratio facta, erit eadem seu æqvalis, Ut si v. g. mistum farinæ hordeaceę, & fabaceæ, in qvo, ratio hordei ad fabas sit ut 4 ad 2 misceatur cum misto alterius farinæ, in qvo, ratio hordei ad fabas sit, ut 8 ad 4: facta additione, antecedentium invicem, & conseqventium invicem; prodit ratio facta 12 ad 6. Ea autem est æqvalis rationi 4 ad 2, vel 8 ad 4. Unde hęc rationum compositio dici neqvit: cum ratio facta, non sit major ea, ex qva componitur.

Subtractio autem rationum, additionis est conversio. Si enim, in priori diagrammate, rationi 56 ad 50. rationem 47 ad 50 detractam velim, aufero antecedens minus à majori: facta est operatio. Atque hoc qvidem modo, ratio 7 ad 50, est suboctupla rationis 56 ad 50: subdupla vero, rationis 14 ad 50: & subtri-

pla

pla 21 ad 50. Sed hoc ipsum, diagrammate quodam, demonstrandum. Si ergo, in figura XIIII, pro obelisco, supponatur corpus parallelepipedum oblongum, cujus qvidem ratio, ad omnes octo ergatas, sit, ut, 50 ad 56, incipiatq; parallelepipedum moveri: quo magis elevatur, eo minorem rationem ad ergatas habebit. Nam cum linea centri gravitatis perpetuo mutetur: etiam ipsum pondus mutatur. Divisa enim basi KLMN in partes æqvales quotcunque, verbi gratia, decem, nempe OPQRSTVXYN. sectoque parallelepipedo in totidem segmenta juxta angulos rectos; erunt singula segméta KLOo, OoPp, PpQq, Qq Rr, &c. singulis segmentis æqvalia. Tum qvoq;, parallelepipedum KLPp erit duplum parallelepipedi KLoO: & parallelepipedum KLQq, triplum parallelepipedi KLOo: & sic KLRr, qvadruplum ipsius KLOo: & KLSs qvintuplum. Secto autem parallelepipedo KLOo plano diagonali OL: erit parallelepipedùm KLOo sectum in duo prismata triangularia LOl & OLo. Eodem modo, secto parallelepipedo KLPp plano diagonali Lp: erit totum parallelepipedum sectum, in bina prismata triangularia lLp & LpP invicem æqvalia. & sic in cœteris. Quoniam ergo, KLOo parallelepipedum, est pars decima KlMN parallelepipedi: erit prisma loL, qvod est, semissis ipsius KLOo, pars vicesima totius parallelepipedi KLMN. Et eodem modo, KlLp prisma, est decima pars parallelepipedi KLMN, utpote semissis, KLPp parallelepipedi. Si ergo

go parallelepipedum KLMN nonnihil erigatur, ita ut OL horizonti ſit perpendicularis: erit pondus totius parallelepipedi, una viceſima parte imminutum: ratio autem moventis aucta. Quoniam ergo, ratio moventis, ad rem movendam, antea erat, ut, 56 ad 50. dempta viceſima parte ponderis, erit ratio moventis, ad rem movendam, ut, 56 ad 47 $\frac{1}{2}$ ſeu ut 112 ad 95. Rurſũ, elevato parallelepipedo KLMN, ita, ut pL ſit perpendicularis horizonti, erit pondus totius parallelepipedi decima parte imminutum: ratioque moventis ad rem motam, ſine augmento altero ipſius parallelepipedi, ut, 112 ad 90, vel 56 ad 45. Quoniam ergo, in omni majoris parallelepipedi elevatione, ratio rei movendæ imminuitur; ratio vero moventis augetur: ergo, illic quidem, erit ſubtractio rationum; heic vero, additio. Et cum antea indicatum ſit, rationem moventis, ad rem mouendam, primo quidem loco eſſe, ut, 56 ad 50: erit ratio, rei movendæ, ad movens, ut, 50 ad 56. ſeu 100 ad 112. Aufertur autem, primò quidem viceſima, inde decima pars hujus; atque ſic in infinitum. Cum ergo, ratio totius parallelepipedi movendi, ad mouentem, ſit, ut, 50 ad 56, vel 100 ad 112; ergo ratio viceſimæ partis erit, ut 5 ad 112: & ratio decimæ, ut 10 ad 112, vel 5 ad 56. Aufer antecedens, rationis 5 ad 112, ab antecedente, rationis 100 ad 112: remanet ratio 95 ad 112. Rurſum, aufer antecedens, rationis 10, ad 112, remanet ratio 90 ad 112. ſeu 45 ad 56. Quoniam vero, id, quod rationi rei

rei movendæ decedit, rationi moventis adjicitur; ergo ratio moventis ad movendum, fit major; ratio vero rei movendæ ad moventem, fit minor: ſicut quivis per ſe facile perſpicit. Satis tamen clarè, ex hoc ipſo exemplo, ſubtractio rationum intelligitur: tum quoque, quid, noſtris Geometris, ratio dupla, tripla, quadrupla ſit: & contra, ratio ſubdupla, ſubtripla, ſubqvadrupla: & cur ita appelletur.

Atque ita quidem, prima & ſimpliciſſima rationum compoſitio, & diviſio, fit addendo, & ſubtrahendo, antecedentia invicem, conſequenti eodem retento. Altera autem compoſitio & diviſio, fit multiplicando & dividendo antecedentia.

Magnitudo autem, per aliam magnitudinem, multiplicari dicitur: quando, juxta eam rationem augetur, juxta quam, multiplicans aucta eſt, ſeu, quando data parte magnitudinis multiplicantis, ratio magnitudinis multiplicandæ ad factam, fuerit, ut ratio partis datæ ad magnitudinem multiplicantem. Ut, in figura num. V. hujus libri, ſit magnitudo DE multiplicanda per magnitudinem BA. Magnitudo ergo DE: eſt multiplicandum: magnitudo vero AB, multiplicans, cujus pars datur BC ſeu BE. Eſt autem ut BC, ſeu BE ad BA, hoc eſt, ut pars multiplicantis ad multiplicantem, ſic multiplicanda magnitudo, ad factam AE. Si enim BA magnitudo multiplicans, tripla fuerit ipſius BE. ſeu BC. etiam EA tripla erit ipſius DE: & vice verſa, qualiscunque pars BE fuerit ipſius AC, talis etiam DE erit pars ipſius EA. Quod

autem antea indicavi, id heic quoque obſervandum eſt, partem, me vocare, qvamcunque magnitudinem alia minorem, qvando duæ iſtæ magnitudines invicem comparantur: totum vero, quæ major eſt. eodem modo quo, manus, & pes, & digitus, & brachium, & quæcunque particula carnis, pars corporis appellatur.

Dividi autem magnitudo, per aliam magnitudinem, dicitur, qvando, juxta eam rationem, ſecatur & dividitur, juxta qvam, alia ſecta eſt. Ut in figura num. V. EA magnitudo ſit dividenda, eo modo, qvo AB dividitur per BE ſeu BC: dico, ut AB ad BE, ſic EA ad DE. Scio qvidem, alia methodo, & multiplicationem, & diviſionem magnitudinum, fieri poſſe: verum id noſtram methodum non tollit, neque hanc rationem multiplicationis, aut diviſionis falſi arguit. Hoc ergo ſuppoſito, dico, compoſitionem rationum fieri multiplicando, qvando, unius rationis antecedens, per alterius rationis antecedens, modo nunc à nobis monſtrato, multiplicatur, factumque, cum eodem conſeqvēte, comparatur. Diviſionem autem, qvando, antecedens unius rationis, per alterius rationis antecedens, modo nunc indicato, dividitur: factumque, cum eodem conſeqvente, comparatur.

Sit enim ratio AE ad AB, componenda multiplicando, cum ratione ED ad BC. Multiplico in fig. num. V. antecedens DE per antecedens AE, dicendo, ut, pars data, ipſius AE, hoc eſt, AB, ad AE, ſic DE, ſeu BF, ad qvartum qvæſitum, ſeu GF: retentoque eo-

dem conſeqvente, dico rationem FG ad EB, ſeu BC compoſitam eſſe ex ratione DE ad BE per rationem AE ad AB, idque, multiplicando antecedentia invicem, eòdem conſeqvente retento.

Si vero ratio BA ad AE, dividenda ſit per rationem BC ad DE, divido antecedens BA, per antecedens BC, dicendo, ut DE ad BC, ſic BA ſeu LN ad BN. Unde ratio BN ad AE, erit facta ex ratione BA ad AE, diviſa per rationem BC ad DE. Quod ſi in compoſitione aut diviſione, alteram rationem ſumere voluerimus: idem òbtinebimus. Componatur enim ratio ED ad BC, multiplicando, cum ratione AE ad AB: erit, ut BC ad DE, ſic AE ſeu BM ad OM. adeoque ratio OM ad BA eſt compoſita ex ratione EA ad BA, per rationem DE ad BC. Eſt vero ut OM ad BM, hoc eſt AE, ſic AE ad BA. Sed ut GF ad BF, hoc eſt DE, ſic DE ad BE ſeu BC. ergo componendo, ut, OM ad AB, ſic GF ad BE. adeoque ratio ex utraque compoſitione, eadem naſcitur, nempe duplicata

In diviſione id ipſum contingit, qvod inverſis terminis patet.

Quando autem iisdem antecedentibùs retentis, conſeqventia invicem, dicto modo, multiplicantur: rationes ipſæ dividuntur. qvando autem conſeqventia dividuntur, rationes ipſæ componuntur. Si enim datis rationibus EA ad BA, & DE ad BC. retento antecedente EA, dixerim dividendo, ut DE ad

BC, sic BA, hoc est, LN ad NB: ratio facta erit EA ad BN, æqvalis rationi OM ad BA, cum utraq; ratio sit duplicata ejusdem rationis. Si vero datis rationibus BA ad EA, & BC ad DE, dixerim multiplicando, ut BA ad EA: sic DE seu BF ad FG, ratio BC ad FG, erit facta dividendo. Cujus rei ratio in promptu est. Si enim conseqventis ratio imminuitur, antecedentis augetur. si vero conseqventis ratio augetur, antecedentis imminuitur & vice versa. qvod, ex iis, qvæ in exemplo de obelisco dicta sunt, plenius intelligitur. Atque ita qvidem omnes qvatuor modi Meibomiani pag. 115. propositi hac una methodo expediũtur: qvi quidem malè dicto loco, additionem vocat, qvæ multiplicatio foret dicenda: tum qvoq; multiplicationem cum divisione confundit, unde omnis ejus error originem habet, de qvo postea. Pluribus qvidem hæc illustrari possent, nisi antea id jam factum esset. Jamvero majoris illustrationis causa, & ut nostra sententia rectius percipiatur, breviter tantum omnia repetimus.

Quando ergo duæ rationes æqvales, semel invicem multiplicando componuntur: ratio composita duplicata Geometris dicitur: qvæ si iterum eodem modo cum priore componatur; ratio triplicata appellatur. & sic qvadruplicata, qvintuplicata. Qvando autem ratio quædam æqvalis, dividitur per aliam rationem æqualem, ratio facta subduplicata alterius, dicitur: & si hæc iterum per priorem dividatur, subtriplicacata: & sic in infinitum subqvadruplicata, subqvintuplicata &c.

Cum

Cum enim illa compoſitio, qvæ fit addendo, plurimum differat ab illa, qvæ fit multiplicando: erretque Meibomius, qvi pag. 115. hæc contra claram demonſtrationem, rerumq; veritatem confundit, idq; absq; omni cauſa: illa qvoq; diviſio, qvæ fit ſubtrahẽdo, longe alia ſit, qvam qvæ fit dividendo: etiam nomina diverſa Mathematici recte adhibent ad diverſas res explicandas ac denotandas. Mirari igitur ſatis neqveo, quid Meibomium moverit, ut tam illiberaliter Clavium aliosque tractaret, qvod hiſce vocibus prædictas res explicuiſſent. Negare qvidem non poteſt, voces duplicatas, triplicatas eſſe probas & omnino Latinas: tum quoque voces Græcas διπλάσιον, τριπλάσιον &c. commode & recte Latinis auribus explicare. Quid ergo deſiderat? Græcos quidem non accuſat, qvi rationes compoſitas, qvas qvidem multiplicando fieri nunc diximus, διπλασίους, τριπλασίους appellarunt. At qværo, num ne voces iſtæ Græce, optime apud Latinos exprimantur per duplicatas & triplicatas. Nemo ſane id negabit, qui Latine Græceque novit, ac plane rudis non fuerit. Sed contendit Meibomius, voces iſtas explicandas eſſe per duplas & triplas. At cur non potius per duplicatas & triplicatas. Græci qvidem, diverſas voces habent, non minus quam Latini. Nam & verba διπλόω, τριπλόω agnoſcunt, quæ Latine per duplare, triplare explicantur: & nomina διπλοῦς, τριπλοῦς, duplus, triplus. διπλασιάζειν vero & τριπλασιάζειν, Latine optime

explicãtur per duplicare triplicare, ſicut διπλάσιος τριπλάσιος, per duplicatus triplicatus. Jam vero ratio illa, quæ Græcis διπλασίων τριπλασίων, (ipſo quidem Meibomio judice) recte & bene appellatur : Geometris Latinis, duplicata & triplicata dicitur. Altera autem, qvã illi qvos habemus Græci Geometræ, non denominarunt, (quæ tamen à priori vere diſtingvitur) dupla tripla. Quodnam ergo heic Geometrarum peccatum ? quave in re lapſi ſunt? Λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα, Latine, rationem duplicatam, triplicatam dixerunt. Vere enim λογος διπλασίων eſt ratio duplicata, & τριπλασίων triplicata. At vel ipſo Meibomio judice ratio ex binis rationibus æqvalibus multiplicando compoſita, Græce & qvidem rectè & convenienter vocatur λόγος διπλασίων, & juxta hunc modum τριπλασίων & τετραπλασίων. Cur ergo Latinè loquentibus eadem ratio duplicata triplicatáve dici neqvit : cum διπλασίων τριπλασίων optime ac proprie per duplicata & triplicata exponatur ? Hæc ergo cenſura Meibomii eſt plane inepta, ne qvid gravius dicam. Qui enim concedit rationem aliſivam Græce convenienter appellari λόγον διπλασίονα, τριπλασίονα &c. idem concedet illam ipſam rationem Latinè duplicatam ac triplicatam appellari ; cum voces duplicata, triplicata Latinæ ſint ; & Græcas haſce voces optimè explicent. Fuere qvidem inter recentiores Geometras, qvi rationes multiplicando factas duplas, triplas, quadruplásve, dixerunt : adeoque, ſi hæc Meibomii cenſura vera foret ; nihil tamen novi

is

is inveniſſet, nec quicquam in medium attuliſſet, quod non antea Commandino aliisq; fuiſſet uſurpatum. Ipſe ẽim Commãdinus, id qvod Euclides vocat λόγον διπλασίονα, Latinè vertit *rationem duplam.* Qvippe, in Elementis Euclideis, nulla alia ratio compoſita occurrit, niſi qvæ fit multiplicando. Qvoniam tamen, alia eſt compoſitio rationis, quæ fit addendo; alia qvæ fit multiplicando: rectius illi Geometræ fecerunt, qvi diſtinctis vocibus, diſtinctas res indicarunt: ac illas, quidem, vocarunt duplas triplásve, has, duplicatas triplicatas. Sive autem cenſura hæc Meibomii approbetur, ſive non: nihil eſt, unde glorietur Meibomius, nihilque, ob quod vel Geometras recentiores in genere carpat, velut novum inventum ignorantibus obtrudat. Si enim neceſſario verum foret, id quod Meibomius dicit, (quamvis ſine ullo argumento) rationes διπλασίους Latine dicendas eſſe *duplas:* neque inventum illud Meibomii eſſet, cum Commandinus aliique ante Meibomium ita ſint loqvuti; neque omnes in genere recentiores arguere, aut erroris inſimulare poſſet; cum Commandinus aliique, quorum hæc ſententia eſt, inter recentiores omnino ſint ponendi. Neminem tamen adeo imperitum fore arbitror, qvi non pervideat; cum duplex ſit rationum compoſitio, una, qvæ fit addendo, altera, multiplicando: qvod etiam diuerſæ res, diuerſis vocibus debeant exprimi: recteque adeo à Geometris,

aliæ rationes duplæ, aliæ duplicatæ appellentur.

CAP. XI.

Alterum vero crimen Meibomii, longe gravius eſt, quod in Theone accuſando committit. Hujus enim ſententiæ & appellationis, qua rationes duplæ & duplicatæ invicem diſtingvuntur, auctorem facit Theonem Alexandrinum, qvem ideo ſatis acerbe perſtringit, cum tamen, nuſquam ab eo probetur, Theonem in hac ſententia fuiſſe: & ſi fuiſſet, omnino recte & accurate eſſet locutus. Sed ut utrumque crimen clarius pateat: ipſa Meibomii verba apponam pag. 99. *Hæc autem omnia, quæ vobis narro de ratioum compoſitione, & de verbis, qvibus illa eſt tradita, nunqvam, inqviebat Euthymius, ſe moturum fuiſſe; niſi falſiſſimum dogma, & qvod maximam errandi anſam aliis præbuit, inde fuiſſet fabricatum. Hac enim denominatorum inter ſe multiplicatione fultus hic Theo Alexandrinus, Geometra alioqvi eximius, qvod ex Commentariis, in Ptolomæi magnam Conſtructionem, videre eſt, adſeruit, triplæ rationis duplam eſſe ſextuplam. Verba ejus ſupra, paginâ 25. v. 28. & pag. 26. v. 18. propoſui, qvæ ex commentariorum libro primo vulgatæ editionis pag. 62. ſunt deſumpta. Hunc ſecuti recentiores, volumina ſua his paralogiſmis impleverunt. Elementa qvoqve tua, Euclide, ad qvæ fuſè, hoc tradidit Clavius, hanc explicationem ferre ſunt coacta. Eucl. Hac narratione percellor, nec qvid dicam, habeo. An*

Theo,

Theo, noster Theo, dixit rationem sextuplam, esse duplam rationis triplæ? adeone rationem jam illo tempore sine ratione mathematici consideraruut? nec Græca verba tum homines intellexerunt, quibus qvæ ratio alterius esset dupla, qvæ tripla, & qvadrupla; qvæ sesqvialtera esset ratio alterius rationis, & supertertia, & superqvarta, &, ut verbo dicam, qvacunque possibili ratione alteram superans, aut ab illa deficiens. THEO. Certè cum ratione hoc adfirmasse videbor, si demonstratio mea inspiciatur: & rerum natura &c. Sed cum hæc verba Meibomii perlego insignem ipsius temeritatem, mirari satis neqveo: qvi non tantum sine omni ratione aut demonstratione certa ac solida, insignes magnosque Geometras inscitiæ & erroris accusare fuerit ausus, ipsisque doctissimis Græcis suæ linguæ ignorantiam objicere, ubi nullus tamen error, vel ab his, vel ab illis est commissus: verum etiam tam splendide Lectori imponere, idque de Theone Alexandrino affirmare, summáque confidentia asseverare, quod verum non esse, ipsemet omnino cognitum habebat, saltem ignorare non poterat. Equidem quibusdam mortalium, quos atra bilis commovet, id sæpissime contingere audivi, ut se solos sapere arbitrentur, cœteros mortales insanire. Quod & Marco Meibomio nunc evenire video, & optarem non evenisse. Falsissimum enim dogma appellat illud, quod omnes sapientissimi Mathematici, qui ea de re verba fecerunt, pro verissimo semper habuerunt: quodque, om-

omnes homines, ratione præditi, & qui judicium hisce de rebus ferre valent, hoc eſt, qui earum rerum non rudes ſunt ac imperiti, de quibus ſententiam rogantur, amoremque veritatis habuerint, longe veriſſimum eſſe pronunciabunt: qvod denique ipſemet Meibomius, nullo unquam firmo argumento falſitatis convincere conatus eſt. Ita ſolus homo Meibomius eſt, reliqvi volitant ſicut umbræ. Sed priori capite demonſtravimus, vere compoſitionem illam rationis, quæ ſit addendo, diſtingvi ab illa, quæ fit multiplicando: ideoque recte omnino feciſſe Geometras, qui diſtinctis vocibus, diſtinctas res appellarunt; illas quidem duplas, &c; has duplicatas: voceq; duplicata, Græcorum διπλασίονα optimè & feliciter explicuerunt. Quuod autem ait, hoc dogma, aliis maximam errandi anſam præbuiſſe; de eo nihil aliud dico, quàm, quod oporteret nomina iſtorum, qui in errorem fuere inducti, heic propoſuiſſe: ut conſtaret, qvi mortales eſſent, an rudes & rerum Mathematicarum ignari? an vero alii? Si enim Theonem inter hos poſitos velit, plane falſus eſt, ut jam dicam. Quod ſi vel ipſe, vel alii, rudes ac imperiti rerum Geometricarum, hac in re lapſi ſunt: id huic dogmati vitio verti non debet. Ipſemet enim antea didiciſſe debebat, quam alios docere occiperet, qvæ non intelligit. Verum iſta omnia in hominem cadunt. errare enim humanum eſt. Quod autem crimen falſi committit, idque Theoni tribuit qvod non dixit,

dixit, tantum ut maledicendi anſam habeat: id vero quale ſit, qvivis judicet. Dicit enim, Theonem Alexandrinum rationem ſextuplam vocare duplam rationis triplæ: ideoque, tùm mathematicos rationem, ſine ratione, conſideraſſe. At vero ſi hoc Theo dixiſſet, qvid ea in re peccaſſet? Nihil ſane. Sed non dixit. Verba ejus quæ ipſemet pro ſe citat Meibomius inſpiciamus pag. 25. v. 28. & pag. 26. v. 18. Ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον, *qvoniam, ſi triplum alicujus duplicaverimus, fiet ipſius ſextuplum.* Ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισύ τινος τριπλασιάσωμεν, ἕξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. *Si enim dimidium alicujus triplicaverimus, habebimus ipſum ſemel & dimidium.* Sed rogo te Meibomi, qva de re loquitur Theo? non'ne de magnitudinibus, delineis ΑΒ. ΓΔ. ΕΖ? Non'ne hæc verba illius integra ſunt. Ἐχέτω γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγον δεδεμένον, οἷον διπλάσιον, ἢ τριπλάσιον, ἤ τινα ἄλλον, καὶ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ καὶ αὐτὸ δεδομένον· λέγω ὅτι ὁ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΖ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, καὶ τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ· ἤτοι, ὅτι, ἐὰν ἡ τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ λόγου πηλικότης, πολλαπλασιαθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΕΖ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ ΑΒ πρὸς ΕΖ. Ἔστω γὰρ πρότερον, τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ μεῖζον, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ ΕΖ· καὶ ἔστω τὸ μὲν ΑΒ τοῦ ΓΔ διπλάσιον, τὸ δὲ ΓΔ τοῦ ΕΖ τριπλάσιον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΓΔ τοῦ ΕΖ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ

ΓΔ διπλάσιον τὸ AB, τὸ ἄρα AB τοῦ EZ ἐστὶ ἑξαπλάσιον, ἐπεὶ καὶ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. Quæ ita verto. *Habeat enim magnitudo* AB *ad magnitudinem* ΓΔ (neque enim τὸ AB & τὸ ΓΔ &c. aliter explicari possunt, aut debent, qvam per τὸ μέγεθος AB &c.) *rationem datam, ut duplam, vel triplam, vel aliam qvamcunque: & magnitudo* ΓΔ *ad magnitudinem* EZ. *etiam datam: dico, qvod ratio* AB *ad* EZ *componatur, ex ratione* AB *ad* ΓΔ, *& ratione* ΓΔ *ad* EZ: *vel etiam, si qvantitas rationis* AB *ad* ΓΔ *multiplicetur per qvantitatem rationis* ΓΔ *ad* EZ, *qvod tum faciat qvantitatem rationis* AB *ad* EZ. *Sit enim prius* AB *magnitudo major magnitudine* ΓΔ, *& rursum* ΓΔ *major ipsa* EZ: *& sit* AB *qvidem dupla ipsius* ΓΔ: ΓΔ *autem tripla ipsius* EZ. *Qvoniam ergo* ΓΔ *tripla est ipsius* EZ: *ipsius autem* ΓΔ *dupla sit* AB: *erit ergo ipsa* AB *sextupla ipsius* EZ. *Qvandoqvidem si triplum alicujus duplicemus, fit ipsius sextuplum.* Nempe, si triplum alicujus lineæ, vel magnitudinis duplicemus: oritur ipsius sextuplum. Si enim EZ fuerit magnitudo unius pedis; ΓΔ autem trium pedum: si dupletur ΓΔ, hoc est, si AB constituatur dupla ipsius BΔ, erit AB sex pedum: adeoque sextupla ipsius EZ. Quæ sane vera sunt ac longe certissima. Non tamen ideo dicit rationem AB ad EZ, esse duplam rationis BΔ ad EZ. Hoc ergo est purum figmentum Meibomii. Aliud enim est, dicere, magnitudinem, qvæ triplæ dupla est, simplicis esse sextuplam: & aliud, rationem sextuplam esse duplam triplæ. Vera quidem utraque asser-

aſſertio, ſicut ſuperiore capite probavimus. Ideoq;, ſi id dixiſſet Theo Alexandrinus, nullo modo erraſſet: neque jure, vel à Meibomio, vel ab ullo alio carpi aut accuſari poſſet. Sed id hoc loco non dicit: adeoque falſus eſt Meibomius, qvi id eum heic dicere aſſeverat. Non enim de rationibus hoc pronunciat Theo, ſed de magnitudinibus. Verùm hic quidem error Meibomii utcunque tolerandus foret: qvandoquidem nullius erroris ipſum Theonem inde convincere poſſit. At quem alibi eidem Theoni intentat, majori diligentia erit refutandus; cum earum rerum ignorantiam Theoni objiciat, qvas optime is cognitas habebat. Dicit enim Theonem non cognitam habuiſſe compoſitionem rationum ineffabilium: ſed quod Euclides, in genere de omnibus rationibus propoſuerat, id Theonem de ſolis effabilibus explicuiſſe, adeoque pro voce πηλικότης, qva Euclides uſus eſt, aliam nempe ποσότης ſuppoſuiſſe. Verba ejus pag. 89. ſub perſona Euclidis & Hermotimi prolata adſcribam integra. *EUCL. Hæc non ſine admiratione qvadam Hermotime te narrantem audio. Haud putaſſem, tantum obſcuritatis interpretibus præbiturum fuiſſe vocabulum* πηλικότης, *qvod ſane eo ſenſu, quo rectè explicavit Euthymius ab omni antiqvitate eſt uſurpatum. Nimirum ex Græcæ literaturæ in Græcis diſciplinis cognoſcendis, neglecta cultura, qvid non ubique errorum eſt enatum. HERMOT. Majore cum admiratione me de altera definitione diſſerentem audies. Nam & clari*

Mathematici, & Græci reprehensionem incurrent, qvorum duos ne ignotos accersam & obscuros, hîc præsentes vides Eutocium dico & Theonem. Diserte enim uterque per rationis πηλικότητα *qvantitatem, te intelligere dicit* ποσότητα *qvotitatem, seu ut ipsi loqvuntur numerum denominatorem, à quo ratio denominatur, qvod, qvale sit superius narravi.* Sed ut cœtera Meibomii intacta relinqvam, id tantum urgebo, quod disertè Theonem & Eutocium dicere ait, nempe Euclidem per πηλικότητα λόγου intelligere ποσότητα, vel ut ipsi loqvuntur numerum denominatorem. Ajo autem id nusqvam Theonem, Eutociúmve dicere: sed nudam & simplicem calumniam esse Meibomii. Neque enim verba, qvæ vel ex Theone, vel ex Eutocio ipsemet exscripsit, qvicqvam tale demonstrant. Quod si dixerit, id tamen inde concludi: ajo eum pessime argumentari, & qvod majus est, vel Theonem Eutociúmve non intellexisse, vel pessima ac plane sublesta fide usum fuisse. Quod ut demonstretur, primùm qvidem proponam, qvid voces ποσότης & πηλικότης Græcis Geometris ac Philosophis significent. Inde, eodem plane sensu has voces Theoni & Eutocio usurpatas. Denique, ea omnia optime eos intelligere, & accurate explicare, ob qvæ eos reprehendit Meibomius: adeoque hunc vel eos non intelligere, vel pessima fide agere; qvod sciens vidensq; bonis auctoribus errorem objiciat, qvem non commisere. Voces ergo ποσὸν & ποσότης denotant omne quantum finitum & mensurabile, tam qvod ad mag-

magnitudinem, qvam quod ad numerum, & ad pondus refertur. Πηλίκον vero & πηλικότης solis quidem magnitudinibus conveniunt, denotant autem omnem magnitudinem, tam commensurabilem alteri, quam incommensurabilem. De utroque veterum testimonia audienda. Nemo enim Græcam lingvam rectius explicuerit, qvam ex ipsis veteribus Græcis, consensuque eorum circa voces. Primus ergo & antiqvissimus testis sit nobis Archytas Tarentinus celeberrimus ille Pythagoræus, cujus verba apud Simplicium in Categoriis hæc sunt. Τᾶς ποσότητος διαφορᾶι τρεῖς. Τὸ μὲν γὰρ αὐτᾶς ἐντὶ ἐν ῥοπᾷ, ὡς τὸ τάλαντον. τὸ δὲ ἐν μεγέθει ὡς τὸ δίπαχυ· τὸ δὲ ἐν πλάθει ὡς τὰ δέκα. *Qvantitatis differentiæ tres. Qvædam enim qvantitas in pondere consistit, ut talentum : qvædam vero in magnitudine, ut bicupitale : qvædam vero in multitudine, ut decem.* Aristoteles qvoque diligens & in verbis perqvam accuratus scriptor voce ποσοῦ, tam continuum qvàm discretum qvantum comprehendit. In Categoriis. Τοῦ δὲ ποσοῦ, τὸ μὲν ἐστι διωρισμένον, τὸ δὲ συνεχές. *Qvantitatis* τοῦ ποσοῦ *una species est discreta, altera continua.* Ad quem locum egregie Simplicius. Ἐγκαλοῦσι δὲ οἱ περὶ τὸν Λούκιον καὶ Νικόστρατον τῇ διαιρέσει πρῶτον μὲν, ὡς μὴ δεόντως καὶ τὸ μέγεθος ποσὸν λεγούσῃ· πηλίκον γὰρ ἔδει τοῦτο λέγειν, ποσὸν δὲ τὸν ἀριθμὸν, τὸ δὲ κοινὸν ἢ ἄλλο τι, ἢ ὁμωνύμως τῷ ἑνὶ τῶν εἰδῶν, ποσὸν καὶ αὐτὸ ὀνομάζειν.

Ἀλλ' ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὸ πλεῖστον, τὸ μὲν συνεχὲς, πηλίκον, τὸ δὲ διωρισμένον, ποσὸν, ἀλλὰ καὶ ὑπαλλάττει πολλάκις (τὸ γοῦν ὕδωρ, συνεχὲς ὂν, ποσὸν λέγομεν, ἀλλ' οὐ πηλίκον· πολὺ γὰρ, καὶ οὐχὶ μέγα· καὶ τὸν χρόνον ποσὸν λέγομεν) εἰκότως οὔτε δύο πεποίηκε κατηγορίας, τὸ ποσὸν, καὶ τὸ πηλίκον, οὔτε κατὰ τὸ πηλίκον καὶ ποσὸν διεῖλεν, ἀλλὰ κατὰ τὸ συνεχὲς καὶ τὸ διωρισμένον, ἅπερ οὐδέποτε ὑπαλλάττει. *Accusant vero sectatores Lucii & Nicostrati hanc divisionem, primùm quidem, quod non convenienter magnitudinem* ποσὸν *vocet: oportebat enim hanc quidem appellare* πηλίκον, *numerum vero* ποσὸν: *commune autem, vel alio quocunqne nomine, vel æquivocè tantum, seu quod uni solùm speciei propriè conveniret, etiam* ποσὸν *nominasse. Sed quandoquidem* πηλίκον & ποσὸν, *quamvis utplurimum, illud quidem continuæ quantitati, hoc autem discretæ tribuatur; sæpius tamen subalternentur: (aquam enim quantitatem continuam* ποσὸν *dicimus, & non* πηλίκον, *quippe multam non magnam, & tempus* ποσὸν *vocamus) rectè quidem, neque duo distincta paedicamenta fecit* ποσὸν *&* πηλίκον, *quotum & quantum; neque quantitatem juxta* ποσὸν *&* πηλίκον *divisit, sed juxta continuum & discretum: utpote quæ nunquam subalternantur.* Ex quibus liquet male à Meibomio voces hasce explicari pag. 11. linea 3. Verba ejus hæc sunt. *Differunt enim Mathematicis* τὸ πηλίκον *&* τὸ ποσὸν, *quod* τὸ πηλίκον *ad quantitatem, seu potius quotitatem continuam referatur.* τὸ ποσὸν *ad discretam.* Neque enim τὸ ποσὸν ad solam discretam quanti-

tita-

titatem refertur, ſed etiam ad continuam; neque πηλικότης qvotitatem proprie magnitudinum exprimit, id enim τὸ ποσὸν facit: ſed qvamcunque magnitudinem indicat, ſive cognita ſit, ſive incognita. Videtur qvidē Nicomachus Geraſenus libro I. Arithmetices hanc Meibomii ſententiam aliquo modo approbare. Poſtquam enim quantitatem in continuam & diſcretam tribuerat, hæc verba ſubjungit, qvæ etiam Meibomius adducit. Φαίνεται δὲ, ὅτι οὔτε περὶ ἁπλῶς μέγεθος, οὔτε περὶ ἁπλῶς πλῆθος συσταίη ἄν ποτε ἡ ἐπιστήμη· ἀόριστον γὰρ ἑκάτερον καθ᾽ ἑαυτὸ ἐστι, πλῆθος μὲν ἐπὶ το πλεῖον, μέγεθος δὲ ἐπὶ τὸ ἔλαττον· ἀλλὰ περὶ τι ἀπ᾽ ἀμφοῖν ἀφοεισμένον ἀπὸ μὲν πλήθους περὶ τὸ ποσὸν, ἀπὸ δὲ μεγέθους περὶ τὸ πηλίκον. *Apparet igitur, qvod ſcientia neque circa magnitudinem ſimpliciter, neque circa multitudinem verſetur: utrumq; enim per ſe indefinitum; multitudo qvidem, qvoad plus; magnitudo vero qvoad minus: ſed circa aliqvid ab utroque abſtractum: nempe circa qvotum* τὸ ποσὸν, *à multitudine: circa qvantum vero* τὸ πηλίκον, *à magnitudine.* Sed non poteſt auctoritas unius Græci, qvique jam ſeneſcente lingva Græca ſcripſit, aliis pluribus optimi ævi ſcriptoribus præferri, apud quos, vox ποσὸ non tantum diſcretæ, ſed etiam continuæ qvantitati tribuitur. Ut taceam, verba Nicomachi, talem explicationem poſſe admittere, quæ cum aliorum Græcorum mente conveniat. Aquam quidem, qva, nihil magis continuum eſſe, omnes norunt, non

ad

ad μέγεθος, ſed ad πλῆθος Græci referunt. Tempus quoque continuam eſſe qvantitatem ſatis liqvet: & tamen ab optimis auctoribus ποσὸν vocatur. Apud Ariſtophanem in Acharnenſibus. Πόσου δὲ τὸν πρῶκτον χρόνου ξυνήγαγεν. *Qvanto tempore exercitum collegit.* & apud Homerum Patrem lingvæ Græcæ, ποσσῆμαρ μέμονας κτερεΐζεμεν Ἕλωρα δῖον ad quæ verba Euſtathius ποσσῆμαρ, ἤτοι πόσας ἡμέρας. Sed & de magnitudine, adeoque qvantitate continua proprie dicta uſurpatur apud Ariſtotelem in Problematibus, Sectione qvinta Quæſtione XXV. Διά τι πλεῖον δοκεῖ ἡ ὁδὸς εἶναι ὅταν μὴ εἰδότες, βαδίζωμεν, πόση τις, ἢ ὅταν εἰδότες. *Qvare via longior appareat, cum ignari quanta ſit, ambulamus, qvàm cum gnari?* cauſas autem reddit ἢ ὅτι τὸ εἰδέναι πόση, τὸ εἰδέναι ἐστὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτοῦ. καὶ πλεῖον ἀεὶ τὸ ἀόριστον τοῦ ὡρισμένου. *An quod noſſe qvanta ſit, id ſit noſſe ipſius numerum? Indeterminatum autem ſemper majus appareat determinato.* & paulo poſt. ἔτι τὸ ποσὸν ὡρισμένον, καὶ τὸ ὡρισμένον ποσόν. *Præterea omne* ποσὸν *eſt determinatum, & omne determinatum* ποσόν. Qvæ verba Ariſtotelis optime declarant qvid τὸ ποσὸν ſit? nempe omne qvantum determinatum, ſive ſit continuum, ſive diſcretum. Viam enim qvamcunque in longitudinem menſuratam, ad qvantitatem continuam referri, nemo ignorat. Hæc ergo optime explicant, qvid voces ποσὸν & ποσότης

ipſis

ipſis veteribus Græcis Philoſophis ſignificent, nempe ut antea dixi, omne quantum determinatum, ſive ſit continuum, ſive diſcretum. De voce autem πηλικότης inſignis eſt locus Ptolemæi, ut alios auctores præteream, qui à Meibomio citantur, eandemque planè ſententiam habent, quam Ptolemæus. Quod enim Nicomachus Geraſenus nonnihil diſſentire videatur: id tanti non eſt. Integrum autem Ptolemei locum apponam, qvamvis longior ſit, ut eo melius vis verbi intelligatur. Extat autem lib. I. Magnæ Syntaxeos capite περὶ τῆς πηλικότητος τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν. *De qvantitate rectarum circulo inſcriptarum*, ad cujus meliorem intellectum ultima verba prioris capitis etiam exſcripſimus. Μέλλοντες δὲ ἄρχεσθαι τῶν κατὰ μέρος ἀποδείξεων, ὧν πρώτην ὑπάρχειν ἡγούμεθα, δι' ἧς ἡ μεταξὺ τῶν προειρημένων πόλων περιφέρεια, τοῦ δι' αὐτῶν γραφομένου μεγίστου κύκλου πηλίκη τις οὖσα, καταλαμβάνεται, ἀναγκαῖον ὁρῶμεν προθέσθαι τὴν πραγματείαν τῆς πηλικότητος, τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν, ἅπαξ γε μελλήσοντες ἕκαστα γραμμικῶς ἀποδεικνύειν. Πρὸς μὲν οὖν τὴν ἐξ ἑτοίμου χρῆσιν, κανονικήν τινα μετὰ ταῦτα ἔκθεσιν ποιησόμεθα τῆς πηλικότητος αὐτῶν, τὴν μὲν περίμετρον εἰς τξ διελόντες τμήματα· παρατιθέντες δὲ τὰς καθ' ἡμιμοίριον παραυξήσεις τῶν περιφερειῶν ὑποτεινομένας εὐθείας, τουτέστι πόσων εἰσὶ τμημάτων, ὡς τῆς διαμέτρου, διὰ τὸ ἐξ αὐτῶν τῶν ἐπιλογισμῶν φανησόμενον ἐν τοῖς ἀριθμοῖς εὔχρηστον εἰς

ρ'κ τμήματα διηρημένης. *Sed cum animus nobis ſit particulares demonſtrationes incipere, quarum primam exiſtimamus eam eſſe, per quam circumferentia, quæ eſt inter prædictos polos, quæque maximi circuli, qui per prædictos polos deſcribitur, pars quantacunque eſt, cognoſcitur: neceſſariam arbitramur modum cognoſcendi* πηλικότητας *quantitates rectarum circulo inſcriptarum primum exponere: ſingula quidem in lineis demonſtraturi. Ad uſum ergo commodiorem, per tabulas quasdam,* πηλικότητα *quantitatem illarum expoſuimus, ipſam quidem circuli peripheriam in partes CCCLX ſecantes: augmentis vero peripheriarum ad ſingulos graduum ſemiſſes, apponentes rectarum, quæ ipſas ſubtendunt quantitates, hoc eſt, quot earum partium ſunt, quarum diameter circuli, propter maximam in numeris commoditatem, (ut ex ſequentibus rationibus fiet manifeſtum) in ſe habet C & XX.* In verbis iſtis παρατεθέντες δὲ τὰς καθ' ἡμιμόιριον παραυξήσεις τῶν περιφερείων ὑποτεινομένας εὐθείας, τουτέστι πόσων εἰσὶ τμηματῶν· quædam deſiderari videntur. Vix enim commodum ſenſum habent. Explerem ita ex Theonis commentario, verbis parum immutatis, παρατιθέντες δὲ ταῖς καθ' ἡμιμόιριον παραυξήσεσι τὰς ὑποτεινομένας εὐθείας vel plenius τὰς τῶν ὑποτεινομένων εὐθειῶν πηλικότητας, τουτέστι πόσων εἰσὶ τμημάτων. Atque ita qvidem verti. Id certum eſt πηλικότητας τῶν ἐν τῷ κύκλῳ εὐθειῶν qvantitates rectarum circulo inſcrip-

ſcriptarum, rectè, ſecundum mentem Ptolemæi, explicari per πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot ſint partium.* Ipſe enim Ptolemæus, qvi hoc capite πηλικότητας ſeu quantitates, rectarum qvarumcunque, circulo inſcriptarum, vult demonſtrare, primum qvidem docet, qvot partium ſit ſubtenſa ſexaginta graduum, ſeu latus hexagoni circulo inſcripti: inde qvot partium latus ſit quadrati circulo inſcripti, ſeu ſubtenſa graduum nonaginta: poſtea qvot partium ſit latus pentagoni, ſeu ſubtenſa graduum LXXII. & denique latus decagoni ſeu ſubtenſa graduum XXXVI. Unde liquet, demonſtrare πηλικότητας rectarum circulo inſcriptarum, idem eſſe Ptolemæo, ac monſtrare, πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot* talium *ſit partium*, qvalium diameter eſt CXX. Qvod ipſum, ex iis, qvæ, ad finem hujus capitis, dicuntur, exque adjunctis tabulis, fit manifeſtum: unde, & ea heic annotavi, ut conſtaret, quid, veteres Mathematici, per πηλικότητα, intellexerint. Ἵνα δὲ, ὡς ἔφην, ἐφ' ἑκάστης τῶν χρειῶν, ἐξ ἑτοίμου, τὰς πηλικότητας ἔχομεν τῶν εὐθειῶν ἐκκειμένας, κανόνια ὑποτάξομεν ἀνὰ στίχους με', διὰ τὸ σύμμετρον, ὧν, τὰ μὲν πρῶτα μέρη, περιέξει τὰς πηλικότητας, τῶν περιφερείων, καθ' ἡμιμοίριον παρηυξημένας· τὰ δὲ δεύτερα, τὰς τῶν παρακειμένων ταῖς περιφερείαις εὐθειῶν πηλικότητας, ὡς τῆς διαμέτρου, τῶν ρκ τμημάτων ὑποκειμένης· τὰ δὲ τρίτα, τὸ τριακοστὸν μέρος, τῆς καθ' ἕκαστον ἡμιμοίριον τῶν εὐθει-

εὐθειῶν παραυξήσεως, ἵνα ἔχοντες τὴν τοῦ ἑνὸς ἑξακοσιοστοῦ μέσην ἐπιβολὴν, ἀδιαφοροῦσαν πρὸς αἴσθησιν τῆς ἀκριβοῦς, καὶ τῶν μεταξὺ τοῦ ἡμίσους μερῶν, ἐξ ἑτοίμου, τὰς ἐπιβαλλούσας πηλικότητας, ἐπιλογίζεσθαι δυνώμεθα. *Ut vero, ad qvemcunque uſum, paratas, ut dixi, quantitates* πηλικότητας *rectarum habeamus: tabulas, verſuum XLV, ſingulas, propter menſuræ commoditatem confecimus, quarum, primus ordo exhibet quantitates* πηλικότητας *peripheriarum, quæ ad dimidium cujusque gradus augentur: alter vero, adjacentium, peripheriis, rectarum, qvantitates* πηλικότητας*, in tot partibus, quot diameter, CXX habere ſupponitur: tertius vero ordo, triceſimam partem augmenti rectarum ad qvosvis dimidios gradus, ut dato unius ſexageſimæ partis exceſſu medio, qui quidem, à vero ſeu accurato, quoad ſenſum, non differt; & cæterarum partium, quæ inter ſemiſſem gradus continentur, excedentes quantitates, ſine labore ſumere liceat.* Subjungitur his tabula, cujus fragmentum appoſuimus.

I. Παραυξ'	II Ἐυθειῶν			III Ἑξηκοςῶν			
ϛ'	ού	λ ά	κε	ου	α	β	ν
α	α	β	ν	ου	α	β	ν
α. ϛ'	α	λ δ	ιε	ου	α	β	ν
β	β	ε	μ	ου	α	β	ν
β. ϛ	β	λζ	δ	ου	α	β	μη
λϛ'.	λζ	δ	νε	ου	ου	νθ	νζ

Prima tabula exhibet, τὰς πηλικότητας τῆς περιφερείων καθ' ἡμιμοίριον παραυξημένας, qvantitates πηλικότητας peripheriarum ad dimidium auctas. Eſt ergo & dimidius gradus, & unus, & duo, & tres, & ſic porro ad 360 gradus πηλικότης qvædam τῆς περιφερείας, ſive circumferentiæ circuli: Πηλικότης quoque rectæ lineæ, circulo inſcriptæ, qvæ unum gradum ſubtendit, eſt partium 1 - 2′. 50″ qvalium Diameter circuli eſt 120. Unde, ſi quæratur qvantitas, ſeu πηλικότης lateris decagoni circulo inſcripti, qvod quidem latus ſubtendit ſemper gradus circuli XXXVI, dico eſſe partium 37. 4′. 55″. talium, qvalium diameter circuli, eſt 120. Recte ergo πηλικότης, in magnitudinibus datis, explicatur per πόσων εἰσὶ τμημάτων *quot ſint partium*. Et demonſtrare magnitudinis cujusdam πηλικότητα, eſt monſtrare πόσων ἐστὶ τμημάτων quot partium ſit. Sic demonſtrare, πηλικότητα magnitudinis decempedalis, eſt, demonſtrare, qvot ſit pedum, nempe decem: qvod ſanè, non minus rectè, dicitur, demonſtrare ipſius ποσὸν ſeu ποσότητα. Adeoque omnis πηλικότης cognoſcitur per τὸ ποσὸν ſeu τὴν ποσότητα. Sic magnitudo AB, in figura num. V. hujus libri, habet qvidem ſuam πηλικότητα, ſed incompertam. Ubi vero ποσότητα ipſius cognoverim, hoc eſt, πόσων τμημάτων ἐστὶ, πόσων ποδῶν, ἢ πήχεων, ἢ σταδίων *quot partium ſit, nempe quot pedum aut cubitorum, aut ſtadiorum*: jam ipſam qvoque πηλικότητα ipſius cognitam habeo. In omni ergo magnitudine, eſt πηλικότης

 quæ;

quæ tamẽ non determinatur, nisi per ποσότητα. Ità docet Ptolemæus, quod κ᾽ἂν μὴ πρὸς τὸ καθόλου δύνεται, τὰς πηλικότητας ὁρίζειν, ἐπί γε τῶν οὕτως ἐλαχίστων, τὸ πρὸς τὰς ὡρισμένας ἀπαράλλακτον δύναιτ᾽ ἂν συντηρεῖν, *quamis* πηλικότητας *quantitates tam exilium præsertim partium, vix quisquam accurate definiverit: nihilo tamen minus, possit illud observari, quod nulla sensibili differentia à definitis distet.* Ubi rursum ὁρίζειν τὰς πηλικότητας est ipsorum ποσὸν exhibere, seu πόσων εἰσὶ τμημάτων. In qvibus, vero, id, præstari neqveat, nec τὸ ποσὸν accuratè inveniri, ibi neque τὰς πηλικότητας καθ᾽ ὅλου ὁρίζειν δύνεται, *absolute qvisquam determinare potest.* Πηλικότης ergo juxta hæc denotat omnem qvidem finitam magnitudinem, tam illam, qvæ cognosci & explicari potest, qvàm, qvæ non potest. Illa autem πηλικότης cognoscitur, cujus τὸ ποσόν seu ποσότης habetur, & de qva dici potest πόσων ἐστὶ τμημάτων, *qvot sit partium.* Illa autem πηλικότης, de qva id dici neqvit, & cujus ποσότης cognita non est, neque cognoscitur, neque verbis explicatur. Idipsum, qvod in magnitudinibus ita demonstravimus, etiam in ipsis rationibus verum est. Quæ enim ratio, inter magnitudines incommensurabiles, fuerit, habet qvidem πηλικότητα, & aliqvam qvantitatem, sed incompertam. Qvæ autem est inter magnitudines commensurabiles; & ποσότητα habet, & πηλικότητα. Scholium Euclidis à Dasypodio editum,

cujus

cujus & Meibomius meminit. Ἐπὶ μὲν τῶν ἀριθμῶν πᾶς λόγος ῥητὴν ἔχει ποσότητα· ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν, ἐστὶ τις λόγος, ὃς οὐ δύναται ῥηθῆναι ἀριθμῷ. Ἐστὶ γάρ τινα ὧν μόνη μὲν γινώσκεται, ἡ πρὸς τὸ ἕτερον ὑπεροχὴ, ἡ δὲ ποσότης ἐστὶν ἄγνωστος. Ταῦτα τοίνυν λόγον λέγεται ἔχειν τῆς ὑπεροχῆς, οὐκέτι δὲ ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τουτέστι ῥητόν. Καὶ διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τῷ ὁρισμῷ τοῦ λόγου τῶν μεγεθῶν, τὸ κατὰ πηλικότητα. ὁ μὲν γὰρ ῥητὸς, καὶ κατὰ πηλικότητα, καὶ κατὰ ποσότητα ἐστίν· οὐ πάντως δὲ ὁ κατὰ πηλικότητα καὶ ῥητός. *In numeris quidem, omnis ratio, quantitatem effabilem, habet: in magnitudinibus verò, ratio quædam eſt, quæ numeris explicari neqvit. Sunt enim qvædam magnitudines, qvarum ſolus exceſſus cognoſcitur: qvantitas vero ignota eſt. Hæ ergo rationem habere dicuntur exceſſûs, non vero, qvem numerus ad numerum, hoc eſt effabilem. Et propter hoc, etiam in definitione rationis magnitudinum, adpoſuit,* κατὰ πηλικότητα. *Effabilis enim ratio & eſt* κατὰ πηλικότητα & κατὰ ποσότητα: *ſed non omnis ratio quæ eſt* κατὰ πηλικότητα *etiam eſt effabilis.* Verum ergo illud eſt, qvod antea dixi, ποσότητα & πηλικότητα hoc differre, qvòd ποσότης omne qvantum, qvod certam & cognitam menſuram habet, ſub ſe comprehendat: πηλικότης verò, ſolam magnitudinem. Rurſum, πηλικότης omni finitæ magnitudini convenit: ποσότης, tantùm determinatæ & effabili. Atq; hæc communis Geometrarum veterum ſententia, qvam nec Meibomius falſi arguere poteſt, imo ipſemet ſeqvi videtur pag. 86. circa finem, qvamvis antea

pag.

pag. nempe undecima, ποσὸν ſoli diſcretæ qvantitati tribuerit, ut antea indicavimus. Qvoniam ergò, vel ipſo Meibomio fatente, ποσότης omne quantum determinatum ſignificet, ſive continuum ſit, ſive diſcretum; πηλικότης vero ſolam magnitudinem, eamque tam determinatam, qvam ineffabilem: non illi male Euclidem explicaſſe, aut voces πηλικότητος & ποσότητος confudiſſe ſunt dicendi, qvi cognitæ & determinatæ πηλικότητι, ποσότητα tribuunt: & tamen nihilo ſecius qvascunque rationes, tàm, qvarum ποσόν datur, qvàm, qvarum τὸ πηλικόν tantum, rectè componunt. Ait qvidem Meibomius, diſerte, & Theonem & Eutocium aſſerere, Euclidem per πηλικότητα λόγου intellexiſſe ποσότητα: ſed nusqvam id probat. Imo plane falſum eſt. Nusqvam enim illa verba, vel apud Theonem, vel Eutocium invenies. Quin potius Theo, commentario in locum illum Ptolemæi, qvem antea laudavimus, voce πηλικότης ſæpius utitur, ſemper eodem modo qvo Ptolemæus, nempe pro qvantitate rectarum circulo inſcriptarum, aliarúmve magnitudinum, tàm numero explicata, qvam ineffabili. Προαποδείξας οὖν τὰς τῶν ὑποτεινουσῶν τὰς εἰρημένας περιφερείας εὐθειῶν πηλικότητας. *Poſtqvam vero demonſtravit qvantitates rectarum, qvæ dictas peripherias ſubtendunt.* Et ſæpius eodem modo, per totum illud caput. Nec demonſtrari poteſt, Theonem, voce πηλικότης, multitudinem deſignaſſe: multo minus, numerum denominatorem, qvod ait Meibomius. Si enim, vel Theo, vel Eutocius πηλικότητα eo

modo

modo explicaſſet: utique, neuter eas rationes compoſuiſſet, in qvibus τὸ ποσὸν ignoratur, ſola πηλικότης datur. At id feciſſe eos, certum eſt. Neque enim ſolas effabiles rationes, hoc eſt, qvarum τὸ ποσὸν datur, compoſuere; ſed etiam ineffabiles, & qvascunque. Verum qvidé eſt, effabiles eos rationes ſecundum ποσότητα componere docuiſſe; quod etiam iis verbis indicant, qvæ Meibomius paſſim citat: cum omnis cognita πηλικότης per ποσότητα explicetur. Non tamen ideo πηλικότητα & ποσότητα confuderunt, neque in verbis Euclideis unam vocem pro alia intellexerunt, nempe pro πηλικότης ποσότης: qvandoqvidem, & eas rationes componunt, qvæ nullam habent ποσότητα, ſed ſolam πηλικότητα. Id ex Theone clariſſimum eſt: ut mirari ſatis nequeam, Meibomium, qvi eam ex Theone paginam laudavit, & qvædam his interſperſa recitavit, vel mala fide hæc diſſimulaſſe; vel Theonem non intellexiſſe, tam clare de his diſſerentem. Neq; enim affirmare velim, hæc non eum legiſſe: qvandoqvidem hanc eandem paginam recitet: & ſupina, ne quid dicam gravius, negligentia ſit, locum qvendam ex ſcriptore adducere, & connexionem textus, ſecundum antecedentia & conſequentia non obſervare: & quod peſſimum eſt, optimum ſcriptorem ignorantiæ arguere, earum rerum, qvas eodem loco, quem præ manibus habeo, accuratiſſime tradit. Si enim Theo Euclidem ita explicuiſſet, ut in definitione compoſitionis rationum, per πηλικότητα intellexiſſet numerum denominatorem:

utique, nullam aliam compositionem rationum agnovisset, qvam illam, qvæ fit per numerum denominatorem: adeoque, nunqvam rationes ineffabiles, in quibus nullus numerus denominator est, vel ipsemet composuisset, vel alios componere docuisset. Id ipsum de Eutocio dicendum est. At uterque, rationes quascunque non tantùm effabiles, sed etiam ineffabiles, componi invicem posse noverat: adeoque, per πηλικότητα, non numerũ denominatorẽ, sed qvantitatem, tàm cujus ποσότης datur, qvàm cujus non datur, intellexit. De Theone res clara est. Eodem enim in loco ubi earum rationum compositionem tradit, qvarum ποσότης datur; etiam illam adducit, qvarum ποσότης non datur. Methodũ enim generalem proponit Theo, qvæ non minus ineffabiliũ qvã effabiliũ rationũ, tam compositioni, qvam divisioni inservit: qvæ qvidẽ methodus, longe facilior, & magis expedita est illa quam Meibomius tam operosè tradit pagina 98. 99. Quod ut clarius pateat, ipsum Theonem loqventem audiamus, commentario in primum librum magnæ Syntaxeos Ptolomæi pag. 62 63. Ἵνα δὲ ἔτι κατάδηλον γένηται τὸ τῆς συνθέσεως τῶν λόγων, διήχθω ἡ ΓΔ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΛΓ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἐπεὶ, ὁ τῆς ΚΓ παραλληλογράμμου πρὸς τὸ ΚΘ λόγος, ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΓΔ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΘ· ὁ δὲ τοῦ ΓΚ, πρὸς ΚΘ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν λοιπῶν, τουτέστιν, ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ

ΓΔ

ΓΔ πρὸς ΔΚ καὶ ἡ ΚΔ πρὸς ΔΘ (τὰ γὰρ ἰσογώνια παραλλη-
λόγραμμα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν
πλευρῶν) καὶ ὁ τῆς ΓΔ ἄρα πρὸς ΔΘ λόγος σύγκειται ἐκ τε
τοῦ τῆς ΓΔ πρός ΔΚ, καὶ τοῦ τῆς ΚΔ πρὸς ΔΘ. Ἀλλ' ἡ μὲν
ΔΚ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· ἡ δὲ ΔΘ τῇ ΖΕ. Ὁ ἄρα τῆς ΓΔ πρὸς
ΕΖ λόγος, τουτέστιν, ὁ τῆς ΓΑ, πρὸς ΑΕ, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς
ΓΔ πρὸς ΔΖ, καὶ τοῦ τῆς ΔΖ πρὸς ΕΖ, τουτέστι τὸ ΖΒ πρὸς ΒΕ.
*Ut verò manifestum fiat, id qvod de compositione rationum
proponitur, educatur in figura numero XV. hujus libri*
ΓΔ *in* Θ, *& fiat* ΔΘ *æqvalis ipsi* ΕΖ. *Super* Δ *vero pun-
ctum erigatur perpendicularis ipsi* ΓΘ, *recta* ΔΚ, *& fiat
æqvalis ipsi* ΔΖ. *Claudatur parallelogrammum* ΑΓ: *&
qvandoqvidem, ratio parallelogrammi* ΚΓ, *ad parallelo-
grammum* ΚΘ, *eadem est, quæ rectæ* ΓΔ, *ad rectam* ΔΘ;
per I. propos: VI. Elem. *ratio autem* ΖΚ *parallelogram-
mi ad parallelogramum* ΚΘ, *componitur ex reliqvis, hoc
est, ex ratione, qvam habet* ΓΔ *ad* ΔΚ, *&* ΚΔ *ad* ΔΘ. (*Æ-
qviangula enim parallelogramma, rationem habent invi-
cem ex lateribus compositam*) per XXIII. VI. Elem.
ratio ergo ΓΔ *ad* ΔΘ *componitur ex ratione* ΓΔ *ad* ΔΚ, *&*
ΔΚ *ad* ΔΘ. *Sed* ΔΚ *æqvatur ipsi* ΔΖ, *&* ΔΘ *æqvatur ipsi*
ΖΕ. *Ratio ergo* ΓΔ *ad* ΖΕ, *hoc est,* ΓΑ *ad* ΑΕ, *componitur
ex ea, qvam habet* ΓΔ *ad* ΔΖ, *&* ΔΖ *ad* ΕΖ, *hoc est,* ΖΒ *ad*
ΒΕ. Ex his clarum, Theonem Alexandrinum ratio-
nes composuisse, non tantum per numeros, quod po-
stea facit; sed etiam in lineis: neque solas effabiles,
sed etiam ineffabiles. Sit enim in figura num XVI.

qvadratum ABCD, cujus diagonalis AC, latus AB. Sit porro aliud qvadratum AEFG, cujus diagonalis ſit AF æqvalis AB lateri qvadrati ABCD. Erit ergo ut AC ad AB, ſic AF, hoc eſt, AB, ad AE. Eſt autem utraque ratio, & AC ad AB, & AB, ſeu AF, ad AE ineffabilis. In qvadratis enim figuris diameter lateri eſt incommenſurabilis per CXVII. Propoſitionem libri X. Elementor. Et tamen, duæ hæ rationes, methodo jam à Theone propoſita, invicem componuntur. Conſtruatur enim CA AB parallelogrammum rectangulum, ipſique CA, in directum jaceat AE: clauſoque parallelogrammo in F, ſit ut BC parallelogrammum, ad AF parallelogrammum; ſic baſis AC ad baſin AE: per I ſexti Element. At BC parallelogrammum, ad AF parallelogrammum habet rationem compoſitam, ex ratione AC ad AB, & ratione AB ad AE. Ergo & AC ad AE, habet rationem compoſitam ex ratione AC ad AB, & ratione AB ad AE: hoc eſt, ratio AC ad AE eſt compoſita ex binis rationibus ineffabilibus AC ad AB, & AB ad AE.

Sed ut clarius pateat, utriusque generis, rationes, juxta Theonis methodum componi poſſe: ea, quæ, paulo poſt proponit, paginâ 36. adducemus. Λέγω δὴ πάλιν, ὅτι καὶ ἐνταῦτα, καθόλου, ἐπὶ τῆς τοιαύτης τάξεως ἡ δεῖξις προχωρεῖ· καὶ πρῶτον, ὅτι ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ, καὶ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς ΓΕ. Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΘ·

καὶ

καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Θ. ἐπεὶ οὖν ὁ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΕ λόγος, τῆς ΖΘ ἔξωθεν λαμβανομένης, σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΘ, καὶ τοῦ, τῆς ΘΖ, πρὸς ΖΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν τῆς ΒΖ πρὸς ΖΘ λόγῳ, ὁ αὐτός ἐστιν ὁ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ· τῷ δὲ τῆς ΘΖ πρὸς ΖΕ, ὁ αὐτός ἐστιν ὁ τοῦ ΑΓ πρὸς ΓΕ, διὰ τὸ ἰσογώνια εἶναι τὰ ΑΕΘ, ΖΕΓ, τρίγωνα. ὁ ἄρα τῆς ΒΖ πρὸς ΖΕ λόγος σύγκειται, ἔκ τε τοῦ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΑ, καὶ τοῦ τῆς ΑΓ πρὸς ΓΕ. *Rursum autem dico, qvod, hinc demonstratio, secundum eandē constitutionē universaliter procedat. Et primùm qvidem, qvod ratio* BZ *ad* ZE, in fig. num. XVII; *componatur ex ratione* BΔ *ad* ΔA, *& ratione* AΓ *ad* ΓE. *Ducatur enim* AΘ *parallalela ipsi* ΓΔ *ex puncto* A: *& producatur* BE *in* Θ. *Qvoniam ergo ratio* BZ *ad* ZE, *qvando* ZΘ *media assumitur, componatur ex ratione* BZ *ad* ZΘ, *& ratione* ΘZ *ad* ZE; *rationi autem* BZ *ad* ZΘ, *æqvalis qvidem sit ratio* BΔ *ad* ΔA; *rationi autem* ΘZ *ad* ZE *æqvalis sit ratio* AΓ *ad* ΓE, *eo qvod triangula* AEΘ *&* ZEΓ *sint æqviangula: ratio ergo* BZ *ad* ZE *componitur, ex ratione* BΔ *ad* ΔA, *& ratione* AΓ *ad* ΓE.

Atq; hoc qvidem modo, utriusq; generis rationes componuntur, tàm ineffabiles, quam effabiles. Si enim componere velim rationes ineffabiles AC ad AB, & AB ad AE; pono, in figura XVIII, AB æqvalem AC, & EΓ æqvalem AB, figuræ XVI. ductaque recta ex puncto A, nempe AB, ita qvidem divisâ in Δ, ut AΔ æqvetur ipsi AE figuræ XVI, ΔB autem æqvalis sit ipsi AB figuræ XVI: jungo BZ & ΔΓ puncta, ductis re-

ctis. Ratio ergo facta multiplicando ex binis rationibus AC ad AB, & AB ad AE, est BZ ad ZE. Etenim ratio BZ ad ZE, componitur ex ratione BZ ad ZΘ, & ZΘ ad ZE. Si enim bina parallelogramma rectangula construantur, unum qvidem, ex BZ ZΘ, alterum vero ex ZΘ ZE: erunt quidem inter se ut bases: adeoque, ut parallelogrammum BΘ ad parallelogrammum ΘE: sic basis BZ ad basin ZE. At parallelogramma BΘ & ΘE sunt in composita ratione laterum: ergo & ratio BZ ad ZE habet rationem compositam ex ratione BZ ad ZΘ, & ΘZ ad ZE. Sed ut BZ ad ZΘ, sic BΔ ad ΔA: per II. VI Elementor. & ut ZΘ ad ZE, sic AΓ ad ΓE: juxta XV. VI. Elementorum. Erit ergo ratio BZ ad ZE, composita ex ratione BΔ ad ΔA, hoc est, BZ ad ZΘ, & ratione AΓ ad ZE, hoc est, ZΘ ad ZE. qvod erat faciundũ. Atq; hoc in plurimis rationũ compositionibus eodem modo se habet: & si illud omne pro compositione rationum habendum esset, quod Theo & ipse Meibomius compositionem appellant, hæc methodus in omni compositione vera foret: ut vere propterea à Theone Alexandrino dictum esset, hanc methodum universaliter procedere. Sed rationes qvidem defectus hac methodo dividuntur, ut antea indicavimus: alia vero methodo componuntur, qvam postea proponemus. Hoc tamen Meibomio non prodest: cum is non magis hæc cognita habuerit, qvam ipse Theo, neque plura in hac doctrina præstiterit.

Demonstratum ergo, Theonem, compositionem rationum, non tantum effabilium, sed etiam ineffabilium, in lineis tradidisse: ideoque, per πηλικότητας, non ποσότητας intellexisse aut numerum denominatorem, sed qvamcunqve qvantitatem magnitudinum, tam numero effabilem, qvam ineffabilem. Adeoque Meibomius, qvi hac in re Theonem accusat, vel eundem non intellexit, vel mala fide egit, ipsique Lectori imponere voluit. Qvod ipsum, de accusatione Eutocii dicendum est. Qvamvis enim hic rationes numero effabiles, juxta numerorum methodum componat: non tamen hoc, ipsi magis vitio verti debet, qvam Meibomio, qvi plurimis id in locis hoc in libro facit. Si enim Meibomius dicat, se non tamen negare compositionem rationum ineffabilium: respondeo, neque id Eutocium facere: sed earum etiam meminisse. Qui enim, in lineis incompertæ magnitudinis, ponit rationem duplicatam triplicatam &c. is etiam rationes qvascunqve effabiles & ineffabiles, componi posse indicat. At vero id Eutocium facere, ex commentario ipsius, in VIII. Propos. lib. II. Archimedis de Sphæra & Cylindro liqvet. Verba ipsius sunt. Καὶ ἐπεὶ τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ BZ. Γ. E. Δ. ἡ BZ ἄρα πρὸς Δ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ BZ πρὸς Γ. τουτέστιν ἡ Γ. πρὸς E. Ἔχει δὲ καὶ ἡ Γ πρὸς Δ διπλασίονα λόγον τοῦ τῆς Γ πρὸς E. Ἡ ἄρα BZ πρὸς Δ ἡμιόλιον ἔχει λόγον τοῦ τῆς Γ. πρὸς Δ. *Et qvoniam qvatuor rectæ* in fig. XVIII. *continuè sunt proportionales,*

les, nempe BZ. Γ. E. Δ. *habebit igitur* BZ *ad* Δ *triplicatam rationem ejus, qvam* BZ *habet ad* Γ, *hoc est qvam* Γ *habet ad* E. *Habet vero &* Γ *ad* Δ *duplicatam rationem rationis* Γ *ad* E. *Ratio ergo* BZ *ad* Δ *erit sesqviplicata rationis* Γ *ad* Δ. Rationem duplicatam fieri ex compositione duarum æqvalium rationum inter se, & triplicatam ex tribus, ne ipse qvidem Meibomius negaverit. Quamvis enim de vocibus disputet: rem tamẽ concedit. Qvoniam ergo, Eutocius non tantum rationis duplicatæ, triplicatæ in datis qvibuscunqve lineis naturam, sed; & solus forte, inter veteres explicat λόγον ἡμιόλιον *rationem sesqvialteram*, qvam ad differentiam ejus qvæ addendo fit sesqviplicatam appellavi: non potest jure accusari ignorantiæ in hac doctrina, aut qvod compositionem rationum ineffabilium ignoraverit. Imo si nihil de his scriptum reliqvisset, non tamen jure hæc ipsi dica scribi posset: qvandoqvidem, his ipsis verbis, qvæ à Meibomio citantur, & qvibus compositionis rationũ in numeris meminit, Theonem laudet; qvem dogma hoc tradidisse jam antea indicavimus.

Verum ergo id est, qvòd antea diximus, Meibomium in Theone & Eutocio accusandis, vel malâ fide egisse, vel illos non legisse, vel denique non intellexisse.

CAP. XII.

QUoniam vero, qvæ de divisione rationum, hucusqve tradidimus, atqve certissimis argumentis confirmavimus; principio, cum qvibusdam definitionibus

bus Euclidis, convenire non posse videantur: adeoque ipsemet Euclides falsi, hac in re, à nobis sit arguendus: paulo accuratius hoc capite de ea re agemus. Antea qvidem diximus, non nobis esse propositum, Euclidem, sicubi erraverit, aut παρόραμα quoddam commiserit, defendere velle: cum sola nobis veritas curæ sit cordique; prætereaque de nulla alia re, his in studiis, simus solliciti. Unde antea præfati sumus, si ex hoc capite, accusationem contra Ueteres instituisset Meibomius; neque vera pro falsis rejecisset: nullo nos modo ipsi adversarios futuros. Quoniam vero Meibomius, in hoc eodem cum aliis veteribus Geometris errore hæreat; falsas autē demonstrationes ex hoc falso principio exstruat: videndum, qvid, de antiqvioribus, præsertim de Euclide, sit dicendum? Theonem enim Alexandrinum, vix excusare possum; qvin heic lapsus dicatur.

Primum igitur ajo, Euclidem, nusqvam, qvod ego sciam, divisionis rationum meminisse. Tum qvoq;, de compositione, ita alicubi loqvutū; ut potius videatur, compositionem & divisionem rationum invicem confundere; qvàm unam ab altera ullo modo distingvere. Qvippe non hodie, neque nuper, id in Euclide animadversum fuit; sed ante multa secula: eum, non semper, tam accuratum in verbis, imò & in demonstrationibus esse; qvin aliquando labatur, humanique aliquid patiatur. de qvo fusius libro primo à nobis dictum est. Sunt tamen, ex qvibus, per bonam con-

ſequentiam, ut in ſcholis loqvuntur, id ſeqvi videtur, Euclidem, diviſionem rationum, à compoſitione diſtinxiſſe, ſaltem, juxta proprias aſſertiones diſtingvere debuiſſe: qvamvis claris id verbis, nuſquam, qvod ego ſciam, fecerit. Propoſitionibus enim decimanona & viceſima libri VI. Elementorum, ait, triangula & polygona ſimilia inter ſe, in duplicata ratione eſſe laterum homologorum. Propoſitio: XIX. Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. *Similia triangula ad invicem ſunt in duplicata ratione laterum homologorum.* Propoſitione XX Τα ὅμοια πολύγωνα εἰς τὰ ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται, καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον, διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. *Similia polygona dividuntur in ſimilia triangula, numero æqvalia, & totis ſimilia: & polygonum duplicatam rationem habet ejus, qvam homologum latus, ad latus homologum.* Sic libro XI. Propoſitione triceſima tertia, demonſtrat ſimilia ſolida parallelepipeda, eſſe in triplicata ratione homologorum laterum. Hinc igitur concludo: hoc, qvod ita ſimpliciter affirmat Euclides, abſolutè, & in omnibus, verum non eſt. Æqualia enim & ſimilia, tam triangula, quàm polygona, non in duplicata ſunt ratione ſuorum laterum, ſed in eadem. Ita etiam æqvalia & ſimilia parallelepipeda ſolida, non ſunt in triplicata ratione,

tione, suorum laterum: sed in eadem. Nam, ut, latus ad latus, sic, parallelepipedum ad parallelepipedum: sicut ipse qvoque Euclides id demonstrat, propositione XXXII. ejusdem libri. Tum ergo hæ propositiones veræ erunt, qvando una qvantitas major est; altera minor: hoc est, qvando unum triangulum vel polygonum, unumve parallelepipedum majus est, alterum minus. Tunc enim majus, ad minus, duplicatam, triplicatamve rationem habet rationis laterum homologorum. Primùm ergo, propositiones hæ absolutæ & simpliciter veræ non sunt. Sed neque reciprocè sumendo veræ sunt. In figura enim XIX sit hexagonum majus ABCDEF: minus GHIKLM: utrumque, in sex triangula similia divisum: dico, ANB triangulum, ad triangulum GNH, habere rationem duplicatam laterum homologorum: ipsum quoque hexagonum ABCDEF, ad hexagonum GHIKLM, habere rationem duplicatam laterum homologorum. Nempe, majus triangulum, majusve polygonum, ad minus, duplicatam habet rationem laterum. Adeoq; minus ad majus, hoc est, triangulum GNH ad ANB, vel hexagonum GHIKLM ad ABCDEF, habet rationem subduplicatam laterum. Majus enim & minus sunt opposita. Unde & rationes eorum erunt oppositæ: & si hæc, duplicata; opposita erit subduplicata: & si hæc triplicata; opposita erit subtriplicata. Sic ratio cubi θικλμνξ ad cubum αβγδεζη est triplicata rationis θλ ad αη. Ideoque ratio cubi αβγδεζη ad

cubum θικλμνξ est ſubtriplicata rationis αη ad θλ. Qvod, ut rectius percipiatur, ac natura oppoſitorum eo melius perſpiciatur: inſigne fragmentum, nobiliſſimi ſcriptoris Archytæ Tarentini, integrum apponam, qvamvis longiuſculum ſit, cum propter ſummam viri auctoritatem, atque in his rebus peritiam: tum qvod vix qvicquam plenius meliusve ea de re dictum ſit. Ita vero is libro περὶ τῶν ἀντικειμένων diſſerit. Καὶ κατὰ νόμον, καὶ κατὰ φύσιν ἀντικεῖσθαι ἀλλήλοις λέγεται. Τά μὲν ὡς ἐναντία, οἷον ἀγαθὸν κακῷ, καὶ ὑγιὲς κάμνοντι, καὶ αληθὲς ψεύδει. Τὰ δὲ, ὡς ἕξις στερήσει, οἷον ζωὰ θανάτῳ, καὶ ὄψις τυφλότητι, καὶ ἐπιστήμα λάθα, Τα δὲ, ὡς πρός τι πῶς ἔχοντα· οἷον, διπλάσιον ἡμίσει, ἄρχον ἀρχομένῳ, καὶ δεσπόζον δεσποζομένῳ. Τὰ δὲ, ὡς κατάφασις καὶ ἀπόφασις· οἷον τὸ ἄνθρωπον ἦμεν, τὸ μὴ ἦμεν, καὶ τὸ σπουδαῖον ἦμεν, τῷ μὴ ἦμεν. Διαφέροντι δὲ ταῦτα ἀλλάλων, ὅτι τὰ μὲν ἐναντία, οὐκ ἀνάγκα ἅμα γίνεσθαι, οὔθ᾽ ἅμα, φθείρεσθαι, Ὑγιεία γὰρ νόσῳ ἐναντίον, καὶ ἀρεμία κινήσει. Ἀλλ᾽ οὔτε ὑγιεία νόσῳ συνυπάρχει, οὔτε ἀρεμία κινήσει· οὐδὲ μὰν ἅμα γίνεται, οὐδὲ μὰν ἅμα φθείρεται ἑκάτερον αὐτῶν. Ἕξις δὲ γενέσεως, καὶ στέρησις διαφέροντι τούτῳ, ὅτι τὰ μὲν ἐναντία μεταβάλλειν πέφυκεν, οἷον τὸ ὑγιες ἐς τὸ κάμνον, καὶ τὸ κάμνον ἐς τὸ ὑγιὲς, καὶ τὸ ὀξὺ ἐς τὸ βαρὺ, καὶ τὸ βαρὺ ἐς τὸ ὀξύ· ἕξις δὲ καὶ στέρησις οὐκέτι· ἀλλ᾽ ἕξις ἔρχεται μὲν ἐς τὰν

στέρη-

στέρησιν, στέρεσις οὐκέτι ἔρχεται ἐς τὰν ἕξιν. Τὸ μὲν γὰρ ζῶον θνάσκει· τὸ δὲ γε θνάσκον, οὐδέποκα ζήσει. Ὅλως δὲ ἕξις μὲν ἐντὶ συνοχὰ τῶ κατὰ φύσιν, στέρησις δὲ ἔκλειψις τῶ κατὰ φύσιν. Τὰ δὲ πρός τι, ἅμα ἀνάγκα, καὶ γίνεσθαι καὶ φθείρεσθαι. Ἀδύνατον γὰρ διπλάσιον μὲν ἦμεν, ἡμίσεον δὲ μή· καὶ ἡμίσεον μὲν ἦμεν, διπλάσιον δὲ μή. Καὶ αἴκα τι γίνεται διπλάσιον, ἅμα καὶ ἡμίσεον γίνεται· καὶ αἴκα τι φθείρεται διπλάσιον, ἅμα ἡμίσεον φθείρεται. Κατάφασις δὲ καὶ ἀπόφασις καὶ λόγος εἴδεα μᾶλλον ἐντὶ, καὶ ἀλήθεος καὶ ψεύδεος μᾶλλον ἐντὶ σημαντικά. Τὸ γὰρ ἦμεν ἄνθρωπον, ἀληθὲς ἐντὶ, ὅκκα ὑπάρχῃ: ψευδὲς δὲ ὅκκα μὴ ὑπάρχῃ. Ὁ δὴ αὐτὸς λόγος, καὶ ἐπὶ τᾶς ἀποφάσιος. Καὶ γὰρ αὕτα ἀληθὴς, ἢ ψευδὴς περὶ τὸ πρᾶγμα τὸ σημαινόμενον· ἀληθὴς μὲν, ὅκκα ὑπάρχῃ, φευδὴς δὲ, ὅκκα μὴ ὑπάρχῃ. Ἔπι ἀγατῶ μὲν καὶ κακῶ μέσον τι, τὸ μήτε ἀγαθὸν, μήτε κακόν· καὶ πόλλω καὶ ὀλίγω τὸ μέτριον· καὶ βραδέος καὶ ταχέος τὸ ἰσοταχές. Ἕξιος, δὲ καὶ στερήσεος οὐδὲν ἐντὶ μέσον. Ζωᾶς τε γὰρ, καὶ θανάτω μεταξὺ οὐδὲν, καὶ ὁράσιος καὶ τυφλότητος· εἰ μή τις λέγοι, τὸ μήπω γενόμενον ζῶον, ἀλλὰ γινόμενον, μεταξὺ ἦμεν ζωᾶς καὶ θανάτω· καὶ τὸ μήπω βλεπὸν κυνίδιον, μεταξὺ ἦμεν, τῶ τε τυφλῶσθαι καὶ ὁρῆν. Οὕτω δὲ λέγων, κατὰ συμβεβηκὸς ἀποδώσει τὰν μεσότητα, οὐ κατὰ τὸν οἰκεῖον ὅρον τῶν ἐναντιωτάτων. Τὰ δὲ πρός τι ἐπιδέχεται μεσό-

μεσό-

μεσότητα. Μεταξὺ γὰρ τῶ δεσπόζοντος καὶ δούλω τὸ ἐλεύθερον· καὶ μεταξὺ τῶ μείζονος καὶ μείονος, τὸ ἴσον· καὶ μεταξὺ τῶ πλάτεος καὶ στενῶ τὸ ἐφαρμόζον· καὶ τῶν ἄλλων ἐναντίων εὑρηθήσεταί τι μέσον, ἢ καὶ ὠνομασμένον, ἢ καὶ ἀνώνυμον. Καταφάσιος δὲ μεταξὺ οὐδὲν ἂν εἴη, οἷον, τῶ τε ἦμεν ἄνθρωπον, καὶ τῶ μὴ ἦμεν· καὶ τῶ ἦμεν μουσικὸν, τὸ μὴ μουσικόν. Καὶ ὅλως δὲ ἀνάγκα, καταφῆσαι, ἢ ἀποφῆσαι, λέγοντα περί τινος. καταφῆσαι μὲν, ὅκκα τι εἶναι δηλοῖ, οἷον, ἄνθρωπον, ἵππον· καὶ συνυπάρχοντα τούτω, οἷον, ἀνθρώπω μὲν, τῶ μουσικῶ ἦμεν, ἵππω δὲ, τὸ πολεμιστᾷ· ἀποφῆσαι δὲ ὅκκα, μὴ ἦμεν τι δηλοῖτο, οἷον, μὴ ἦμεν ἄνθρωπον, ἢ μὴ ἦμεν ἵππον, ἢ μὴ συνυπάρχον τούτω, οἷον, μὴ ἦμεν τὸν ἄνθρωπον μουσικὸν, ἢ μὴ ἦμεν τὸν ἵππον πολεμιστάν. Μεταξὺ δὲ γε τᾶς καταφάσιος αὐτᾶς καὶ ἀποφάσιος οὐδέν.

Et secundum legem, & secundum naturam, quædam sibi invicem opponi dicuntur· alia quidem ut contraria: sicut bonum, malo; & sanum, ægro; & verum mendacio: alia vero, ut habitus, privationi; sicut vita, morti, & visus, cæcitati, & scientia, ignorantiæ: alia vero, ut relationem invicem habentia; sicut, duplum dimidio, imperans, illi cui imperatur, & dominus, servo: alia vero, ut affirmatio & negatio, sicut hominem esse, opponitur, non esse, & diligentem esse, opponitur, non esse. Differunt vero hæc invicem, quod, contraria non necessariò simul sint, & simul esse desinant. Sanitas enim morbo contraria est, & qvies, motui. Sed neque sani-

ſanitas unà cum morbo exiſtit; neqve qvies, una cum motu: neque alterutrum horum, cum altero ſimul incipit, neque ſimul cum altero eſſe deſinit. Habitus vero exiſtentiæ (in Græco legitur ἕξις δὲ γενέσιος ubi vox γένεσις denotare videtur *fieri* aut *exiſtere*, ut diſtingvatur vòx habitus ab aliis ſignificationibus) *& privatio, hoc differunt: qvod, contraria permutari invicem poſſint: ſicut, ſanitas in ægritudinem; & ægritudo, in ſanitatem: & acutum, in grave; & grave in acutum. habitus vero & privatio non item: ſed habitus qvidem in privationem mutatur, privatio verò nunqvam in habitum. Etenim, vivens quidem moritur: mortuum verò minimè reviviſcit. Abſolutè autem, habitus eſt poſſeſſio ejus, qvod eſt ſecundum naturam: privatio verò, amiſſio ejus, quod eſt ſecundum naturam. Qvæ autem relationem invicem habent, ſimul neceſſariò & ſunt, & eſſe deſinunt. Impoſſibile enim eſt, duplum qvidem dari, niſi dimidium una detur. Et ſtatim ac duplum eſſe incipit, ſimul & dimidium eſt: & ſtatim ac duplum eſſe deſinit, etiam dimidium eſſe deſinit. Affirmatio vero & negatio ſermonis potius ſpecies ſunt, ac veritatis & mendacii indices.* (In Græco legendum arbitror Κατάφασις δὲ καὶ ἀπόφασις λόγω εἴδεα μᾶλλον ἐντὶ &c. & ſic qvoque verti: altera enim lectio ſenſum commodum non habet) *Eſſe enim hominem, verum eſt, quando ita eſt: falſum autem, qvando non eſt. Eadem vero ratio in negatione. Qvippe hæc, vel vera eſt, vel falſa, ſecundum*

rem illam quam denotat: vera quidem, quando, res ita se habet: falsa autem, quando non ita se habet. Rursum, bono & malo medium aliquod datur, quod neque bonum est, neque malum: plus quoque, & minus, medium habet mediocritatem: & tardius ac celerius, id quod est æqualis celeritatis. Habitus vero & privationis nullum datur medium. Inter vitam enim & mortem, nihil est medium; sicut neque, inter cœcitatem & visum: nisi quis dicat, id, quod nondum natum est, sed nunc nascitur, medium esse inter vitam & mortem: & catellum, qvi nondum videt, inter cœcitatem & visum medium obtinere. Qui vero ita loquitur, medium dat, secundum accidens: non vero secundum propriam definitionem contrariorum. Relativa vero medium habent. Inter dominum enim & servum medium datur liberum esse: & inter majus & minus, æquale: & inter latius & angustius, id quod convenit. Cæterorum quoque contrariorum, medium aliquod invenietur, qvod, vel nomen habet, vel nomine caret. Inter affirmationem vero & negationem, medium non datur. Sicut inter illas enunciationes, homo est, & homo non est, nihil medium datur: aut illud, musicum esse, vel non esse. Et absolutè quidem, aliquid necessario vel affirmari dicitur, vel negari de aliquo: affirmari quidem, quando esse indicatur, sicut hominem, eqvum: & qvæ una cum his existunt: sicut, cum homine qvidem, esse musicum; cum equo verò, esse bellatorem: negari verò, quando indicatur quid non sit: sicut non esse hominem, vel non esse eqvum: tum quoque de iis quæ cum his sint, ut hominem

non esse musicum , aut eqvum non esse bellatorem. Inter affirmationem vero & negationem nullum est mediũ. Cum vero ex his constet, duplum & subduplum, & duplicatum ac subduplicatum , ex eo genere oppositorum esse , qvorum uno dato , alterum quoque detur , & uno sublato , alterum quoque tollatur : manifestum est , cum triangula , polygonáve majora, habeant ad minora , rationem duplicatam laterum homologorum : etjam minora triangula & polygona , ad majora , rationem habere subduplicatam laterum homologorum. Atque eodẽm modo , cum , parallelepipedum majus, ad simile parallelepipedum minus , rationem habeat triplicatam rationis laterum homologorum : etiam minus parallelepipedum , ad majus , rationem habere subtriplicatam laterum homologorum. Omnis enim ratio duplicata ponit subduplicatam : & omnis ratio triplicata ponit subtriplicatam. Nempe , si unus terminus comparatorum , duplicatus fuerit ; alter subduplicatus erit : & si unus triplicatus ; alter subtriplicatus. At , quemadmodum , duplicatum & triplicatum ex multiplicatione fit : ita subduplicatum , & subtriplicatum fit ex divisione. Contrariæ enim conclusiones ex contrariis operationibus procedunt , duplicatio qvidem ex multiplicatione , ut jam dictum fuit : subduplicatio vero , & subtriplicatio ex divisione. Sicut ergo nulla duplicatio , triplicatióve , sine multiplicatione peragitur : ita , nulla subduplicatio , subtriplicatiove sine divisione unqvam perfici potest.

Eodem ergo modo, qvo ratio ANB, ad GNB, vel ABCDEF, ad GHIKLM, eſt facta multiplicando, ex compoſitione rationis AG, ad GN, & AB, ad GH: ratioque θικλμνξ ad αβγδεζ eſt facta triplicando rationem θλ ad αη per ſeipſam: ita etiam, ratio GNH ad ANB, vel GHIKLM ad ABCDEF, fit dividendo rationem GN ad AN per ſeipſam: ratioqve αϐγδεζη ad θικλμνξ fit dividendo bis rationem αη, ad θλ per ſeipſam. Sit enim in eadem figura XIX ut, AN ad GN, ſic GN ad HP. Et rurſum, ut, θλ ad αη, ſic αη ad ϱσ, & ϱσ ad στ. Ut ergo AN ad HP, ſic ANB triangulum ad GNH triangulum· vel, ut AN ad HP, ſic ABCDEF ad GHIKLM: & vice verſa, ut GNH ad ANB, ſic HP ad AN: vel ut GHIKLM ad ABCDEF, ſic HP ad AN. Ratio autem GNH ad ANB, vel GHIKLM ad ABCDEF eſt ſubduplicata rationis GN ad AN, ut jam demonſtravimus. ergo & ratio HP ad AN, eſt ſubduplicata rationis GN ad AN. At ratio ſubduplicata eſt facta ex diviſione rationis illius in ſe, cujus eſt ſubduplicata: ut jam indicavimus, atque antea plenius expoſuimus. Ratio ergo HP ad AN eſt facta ex diviſione rationis GN ad AN, per rationem GN ad AN. Eodem modo, ratio θλ ad στ, eſt triplicata rationis θλ ad αη. Nam ut θικλμνξ ad αβγθεζη, ſic θλ ad στ. At θικλμνξ ad αβγδεζ, eſt triplicata rationis θλ ad αη. ergo θλ ad στ, erit triplicata rationis θλ ad αη. Dico vero vice verſa, ut, αβγδεζη ad θικλμνξ, ſic στ ad θλ. Sed ratio αβγδεζη ad θικλμνξ, eſt ſubtriplicata rationis αη ad θλ,

urpo-

utpote, opposita rationi θικλμνξ ad αβγδεζη: ergo & ratio στ ad θλ, erit subtriplicata rationis αη ad θλ. Ratio vero subtriplicata, est facta ex iterata divisione rationis datæ per seipsam divisæ: ratio ergo στ ad θλ, est facta ex iterata divisione rationis αη ad θλ.

Atq; ex his liquet, qvod, qvamvis Euclides, nusquã, qvod ego sciam, divisionis rationum meminerit: per bonam tamen conseqventiam, illa doctrina, ex ipsius principiis & demonstrationibus, deducatur ac probetur. Unde etiam patet, qvomodo definitiones X & XI libri qvinti, rationis nempe duplicatæ, triplicatæ, &c. sint explicandæ: nimirum semper de ratione majoris termini ad minorem, non autem vice versa. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον, διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. *Qvando autem tres magnitudines proportionales fuerint, prima, ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur, ejus qvam habet ad secundam. Qvando autem qvatuor magnitudines fuerint proportionales: prima, ad qvartam, triplicatam rationem haberè dicitur, ejus qvàm habet ad secundam: & semper deinceps unâ plus, qvoad proportio processerit.* Nempe si in figura XIX, tres lineæ AN. GN. HP fuerint continuè proportionales: erit ratio

AN ad HP, duplicata rationis AN ad GN. ratio autem HP ad AN, ſubduplicata rationis GN ad AN, ut jam fuit demonſtratum; adeoque, & ſubduplicata rationis HP ad GN : cum HP ad GN æqvetur rationi GN ad AN. Eodem modo ratio θλ ad στ, eſt triplicata rationis θλ ad αη : ſumptis qvatuor continuè proportionalibus θλ. αη. ϱσ: στ. Ratio autem στ ad θλ eſt ſubtriplicata rationis αη ad θλ, vel στ ad ϱσ.

Illud etiam ex his clarum fit, rationem AN ad HP fieri componendo, ex ratione AN ad GN per rationem GN ad HP: adeoque, rationem GN ad HP fieri, dividendo rationem AN ad HP, per ſe: hoc eſt, inveniendo mediam proportionalem inter AN & HP. Sicut enim, AN ad HP, eſt duplicata rationis, GN ad HP: ita, GN ad HP, eſt ſubduplicata rationis AN ad HP.

Ita etiam ratio αη. ad ϱσ, eſt ſubduplicata rationis θλ ad αη, vel αη ad ϱσ: tum quoque ratio ϱσ ad στ, ſubtriplicata rationis θλ ad στ, inventa nempe per duas medias proportionales inter θλ & στ. Quod ſi qvinta continuè proportionalis major in eodem ſchemate ſumatur: erit ratio ϱσ ad στ, ſubqvadruplicata rationis φχ ad στ, inventa nempe, per tres medias proportionales, inter φχ & στ conſtitutas. Atque hoc modo additis qvotcunque continuè proportionalibus; aut pluribus mediis proportionalibus inventis : ratio exceſſus vel componitur, vel dividitur.

Inver.

Inverſa autem methodo, rationes defectus, additis qvotcunque continuè proportionalibus, dividuntur: inventis autem mediis proportionalibus, augentur ac multiplicantur. Ex iis enim, qvæ antea fuere demonſtrata, ratio HP ad AN eſt ſubduplicata rationis GN ad AN, adeoque ratio GN ad AN, vel HP ad GN, eſt duplicata rationis HP ad AN. Sic ϱσ ad θλ, eſt ſubduplicata rationis ϱσ ad αη, ut antea demonſtratum. Unde ratio ϱσ ad αη, eſt duplicata rationis ϱσ ad θλ. & eodem modo στ ad ϱσ, eſt triplicata rationis στ ad θλ.

Ex qvo id etiã intelligitur, quid ratio illa rationis ſit, qvam Archimedes ἡμιόλιον vocat, Latinè ſeſqvialteram: qvæ potius, ad differentiam illius qvæ addendo fit, ſeſqviplicata foret dicenda, & ſic ſeſqvitriplicata & ſeſqviqvadruplicata: novis qvidem vocibus, ſed ad differentiam rerum neceſſariis: qvas tamen ita propono, ut, ſi qvis alias retinendas velit, cum eo diſputare nolim. Nempe, ratio φχ ad ϱσ, eſt triplicata rationis φχ ad θλ: ratio autem φχ ad αη, eſt duplicata rationis φχ ad θλ: ratio ergo φχ ad ϱσ, ſeſqviplicata Græcè ἡμιόλιος *ſeſqvialtera* rationis φχ ad αη. Una enim ratio eſt ut 3, altera ut 2. Sic ratio φχ ad στ, eſt qvadruplicata rationis φχ ad θλ: adeoque, erit duplicata rationis φχ ad αη: ſeſqvitriplicata autem, vel ſi mavis, ſeſqvitertia, rationis φχ ad ϱσ. Ita, ſi in eadem hac figura, ſumantur octo continuè proportionales πυ. ομ. ζν. φε. θδ. αγ. ϱθ. στ. erit qvidem ratio πυ ad στ ſeptuplicata ratio-

onis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$; ratio autem $\pi\upsilon$ ad $\varrho\varsigma$ erit ſextuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$. unde ratio $\pi\upsilon$ ad $\sigma\tau$ erit ſeſqviſexta; vel ſi mavis ſeſqviſexplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\varrho\varsigma$. ſunt enim, ut 7 ad 6. Porro ratio $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$ eſt qvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, adeoque ſubſeſqviqvintupla, vel ſubſeſqviqvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$. Ratio enim $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$ eſt ſextuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$. ratio autem $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$ eſt qvintuplicata ejuſdem rationis $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, Ergo ratio $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$ eſt ſeſqviqvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$. & per conſeqvens, ratio $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$, eſt ſubſeſqviqvintuplicata rationis $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$. Adeoque ratio $\pi\upsilon$ ad $\varrho\beta$, componitur ex ratione $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, multiplicata per rationem $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$: vel, ex ratione $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$, multiplicata per rationem $\pi\upsilon$ ad $o\mu$. Eadem vero ratio, $\pi\upsilon$, ad $\varrho\beta$, diviſa per rationem $\pi\upsilon$ ad $o\mu$, dat factam, $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$: & diviſa per $\pi\upsilon$ ad $\alpha\gamma$, dat factam $\pi\upsilon$ ad $o\mu$.

Qvoniam vero antea demonſtratum fuit, rationem $\phi\varepsilon$ ad $\pi\upsilon$, eſſe ſubtriplicatam rationis $o\mu$ ad $\pi\upsilon$; & rationem $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$, eſſe ſubduplicatam rationis $o\mu$ ad $\pi\upsilon$: erit ergo ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$ triplicata qvidem rationis $\phi\varepsilon$ ad $\pi\upsilon$; duplicata vero rationis $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$. Et eodem modo, eadem ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$, erit qvadruplicata rationis $\theta\delta$ ad $\pi\upsilon$, & qvintuplicata rationis $\alpha\gamma$ ad $\pi\upsilon$: & ſic quouſque continue proportionales fuerint ordinatæ. Qvod ex jam demonſtratis liqvet. Erit ergo ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$, compoſita ex ratione $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$, & $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$, ſeu $\theta\delta$ ad $\zeta\nu$. eſt enim $\theta\delta$ ad $\zeta\nu$, æqvalis rationi $\zeta\nu$ ad $\pi\upsilon$. Eodem modo, ratio $o\mu$ ad $\pi\upsilon$, eſt compoſita, ex ratione $\phi\varepsilon$ ad $\pi\upsilon$ triplicata,

cata, & ex ratione θδ ad πυ qvadruplicata, & ſic in infinitum. Omne autem compoſitum in ea dividitur unde componitur. Ratio ergo ιμ ad πυ, in tres æqvales rationes diviſa dat factam, rationem φε ad πυ: & in qvatuor, rationem θδ ad πυ. & ſic in cœteris. Adeoque in rationibus defectus, quo plures continuè proportionales ſumantur, eo magis prima ratio dividitur; quo plures autem medii continuè proportionales habentur: eò magis rationes defectus componuntur. Si enim inter terminos rationis θδ ad πυ unica media proportionalis ſumatur, nempe ζυ; erit ratio ζυ ad πυ, vel θδ ad ζυ duplicata rationis θδ ad πυ. Qvadratum enim ex ζυ, ad qvadratum ex πυ, ſe habet, ut θδ ad πυ. At vero qvadratum ex ζυ, ſeu minus, ad qvadratum ex πυ, ſeu majus, eſt in ſubduplicata ratione laterum. Majus enim qvadratum, ad minus, eſt in ratione duplicata laterum; adeoque minus, qvadratum ad majus, erit in ratione ſubduplicata laterum: hoc eſt, ratio qvadrati ex ζυ, ad qvadratum ex πυ, qvæ eſt ratio θδ ad πυ, eſt ſubduplicata rationis laterum, hoc eſt, rationis ζυ ad πυ. Ratio ergo ζυ ad πυ, eſt compoſita ex ratione θδ ad πυ duplicata. Quod ſi inter φε & πυ, vel alterius cujuſcunque rationis defectûs terminos, ſumatur media proportionalis: ratio prioris termini ad mediam; vel mediæ, ad conſeqvens, erit compoſita ex ipſa ratione defectus datâ duplicatâ. Cujus demonſtratio ex priori dependet. Sive enim inter θδ & πυ, ſive inter φε & πυ, ſumatur media proportionalis;

lis; eadem erit demonſtratio, eadem utrobique veritas.

Si vero inter φε & πυ, ſumantur duæ mediæ proportionales, nempe ζυ & ομ. erit ratio φε ad ζυ, vel ζυ ad ομ, vel ομ ad πυ, (hæ enim tres rationes ſunt invicem æquales) triplicata rationis φε ad πυ. Solidus enim cubus ex ομ, ad ſolidum cubum ex πυ, ſe habet, ut, φε ad πυ. Eſt vero cubus ex ομ, ad cubum ex πυ, in ſubtriplicata ratione laterum. Major enim cubus, qvi eſt ex πυ ad minorem ex ομ, eſt in triplicata ratione laterum: ſeu, ut, πυ ad φε, ſic cubus ex πυ, ad cubum ex ομ. Adeoque minor cubus ad majorem erit in ſubtriplicata ratione laterum ομ ad πυ. Eſt vero ratio minoris cubi ad majorem, ut, φε ad πυ. Ergo ratio φε ad πυ, erit ſubtriplicata rationis ομ ad πυ. ideoque ratio ομ ad πυ, triplicata rationis φε ad πυ.

Porro ex priori demonſtratione, ſi inter ζυ & πυ ſumatur media proportionalis ομ: erit ratio ομ ad πυ, duplicata rationis ζυ ad πυ. Ratio autem ζυ ad πυ, antea fuit demonſtrata duplicata eſſe rationis θδ ad πυ. Ergo ratio ομ ad πυ, eſt qvadruplicata rationis θδ ad πυ. Et ſic in infinitum progrediendo, qvo plures medii proportionales inter terminos rationis defectus ſumantur: eo magis ratio illa componitur: & ſi una ſumatur media proportionalis, duplicatur; ſi duæ, triplicatur; ſi tres, qvadruplicatur, & ſic in infinitum. At ratio qvadruplicata, magis eſt compoſita qvam triplicata:

cata: & triplicata, magis compoſita, qvàm duplicata; & ſic in cœteris.

Quo plures autem, in rationibus defectûs, continuè proportionales fuerint, eo magis ratio defectûs dividitur. In ratione enim θδ ad φε, ſi ſumatur una continuè proportionalis, nempe ζν, vel ab altera parte, αγ: erit ratio θδ ad ζν, vel αγ ad φε, ſubduplicata rationis φε ad ζν, vel θδ ad φε. Cum enim ratio φε ad ζν, vel θδ ad φε, ſit duplicata rationis θδ ad ζν: ut jam fuit demonſtratum: erit etiam huic oppoſita, ratio θδ ad ζν, ſubduplicata rationis θδ ad φε: adeoque, facta ex æqvali diviſione rationis φε ad ζν.

Sumptis verò binis continuè proportionalibus, nempe ζν, & ομ; vel, ab altera parte, ρβ, & αγ: erit ratio θδ, ad ομ, vel ρβ, ad φε, ſubtriplicata rationis θδ ad φε: hoc eſt, φε ad ζν, vel ζν ad ομ, &c. Ratio enim ζν ad ομ, eſt triplicata rationis θδ ad ομ, ut jam antea fuit demonſtratum. Ergo θδ ad ομ, eſt ſubtriplicata rationis ζν ad ομ. Adeoque ſubtriplicata rationis φε ad ζν, vel θδ ad φε. Hæ enim rationes ſunt inter ſe æqvales. Qvod ſi adhuc una continuè proportionalis addatur, nempe πν: erit ratio θδ ad πν, ſubqvadruplicata rationis ομ ad πν. Ratio enim ομ ad πν, eſt qvadruplicata rationis θδ ad πν: ut jam antea demonſtravimus. Oppoſita ergo huic θδ ad πν, erit ſubqvadruplicata rationis ομ ad πν.

In omni ergo rationum compoſitione, id verum eſſe deprehenditur: rationes exceſſûs, componi, ad-

jectis continuè proportionalibus; dividi autem, mediis proportionalibus una pluribusve interpositis: defectûs verò, rationes, contrario se modo habere; & componi qvidem, interpositis, unâ, pluribúsve mediis proportionalibus; dividi autem, adjectâ unâ alteráve continuè proportionali. Tum quoqve compositionem in rationibus excessûs, & divisionem in rationibus defectûs, non tantùm fieri, qvando nuper inventa, binis, continuè proportionalis fuerit; sed etiam, qvando utrâque datâ vel major est, vel minor. Cum enim omnes lineæ in infinitum augeri minuique possunt; partesque qvæcunque, juxta qvamcunque rationem, addi, demique; etiam linea qvæcunqve, major utrâque datâ, vel minor utrâque datâ, erit una ex continuè proportionalibus. Si enim ratio majoris inventi ad minorem terminum datum, vel minoris inventi ad majorem terminum datum, duplicata non fuerit rationis datæ, sed major: erit triplicata, vel qvadruplicata, vel decuplicata, vel centuplicata, atq; sic in infinitum. Et si minor fuerit duplicatâ: erit vel sesqviplicata, vel sesqvitriplicata, vel sesqviqvadruplicata, vel qvæcunque alia; sic qvoque in infinitum progrediendo. In rationibus autem defectûs, eodem modo, ratio inventa, erit subduplicata, subtriplicata, subcentuplicata: vel subsesqviplicata, subsesqvitriplicata, subsesqviqvintuplicata, & sic porro in infinitum. Quod si ne sic qvidem rationem illam rationis explicare datum fuerit: ad multiplo-super-

par

particulares veniendum erit. Sic inter πυ & στ ſi media aſſumatur ρβ· erit ratio πυ ad στ ſeptuplicata rationis ρβ ad στ. Sumptis enim inter πυ & στ ſex mediis proportionalibus: erit ratio πυ ad ομ, æqvalis rationi ρβ ad στ. Sumpta vero inter πυ & στ, αγ: erit πυ ad στ. triploſeſqvialtera, vel triploſeſqviplicata rationis αγ ad στ. Sic ratio πυ ad στ eſt duploſeſqvitriplicata rationis θδ ad στ. Ratio autem πυ ad στ eſt ſupertripartiens rationis φε ad στ. His autem contrariæ ſunt rationes defectus, ſuo qvæqve loco ſumptæ. Atque in his qvidem proprias voces invenire non tam facile eſt. Neque ſanè nos de vocibus admodum ſolliciti ſumus: modò, ita ſenſa animi aliis explicata dare poſſimus, ut intelligamur. Id liqvet, qvamcunque mediam, inter alias duas medias datas, aſſumptam, rationem qvidem exceſsûs dividere, defectûs vero rarionem componere: qvod fuſè hucuſqve à nobis fuit demonſtratum.

CAP. XIII.

Qvoniam vero ex hac mediarum aſſumptione qvædam analogiæ ſeu proportiones enaſcantur, qvæ Geometricæ nec appellantur, nec ſunt; ne hoc nobis officiat, ulliusve erroris cauſa ſit, paulo accuratius, proportiones haſce explicabimus. Notandum vero eſt, id qvod Græci ἀναλογίαν vocant Latinis proportionem dici; qvam qvidem vocem primus Cicero ita appellavit. Verba enim Platonis ex Timæo,

δεσμῶν δ' ὁ κάλλιστος, ὃς ἂν αὐτὸν καὶ τὰ ξυνδούμενα, ὅτι μάλιστα ἓν ποιῇ, τοῦτο δὲ πέφυκεν ἀναλογία κάλλιστα ἀποτελεῖν· ὁπόταν γὰρ ἀριθμῶν τριῶν, εἴτε ὄγκων, εἴτε δυνάμεων, ὡντινωνοῦν ᾖ, τὸ μέσον ὅ, τι πὲρ τὸ πρῶτον πρὸς αὐτὸ, τοῦτο αὐτὸ πρὸς τὸ ἔσχατον· καὶ πάλιν αὖθις, ὅ, τι, τὸ ἔσχατον πρὸς τὸ μέσον, τοῦτο τὸ μέσον πρὸς τὸ πρῶτον· hiſce Latinis expoſuit. *Sed vinculorum id eſſe aptiſſimum atque pulcherrimum, qvod ex ſe, atque de his, qvæ aſtringit, qvam maximè unum efficit. Id optimè aſſeqvitur, qvæ Græce* ἀναλογία, *Latine (audendum eſt enim, qvoniam hæc primum à nobis novantur) comparatio, proportióve dici poteſt. Qvando enim trium vel numerorum, vel figurarum, vel qvorumcunque generum, contingit, ut, qvod medium ſit uti primum proportione, ita id poſtremo comparetur; viciſſimque, ut extremum cum medio, ſic medium cum primo conferatur &c.* Unde liquet primum Ciceronem Græcam hanc vocem per proportionem explicuiſſe. Commandinus autem, aliique, id qvod Græci λόγον vocant, proportionem dixere, retenta Græca voce ἀναλογίας, vel pro illa, alia quadam aſſumpta, quamvis minus Latina, nempe proportionalitate. Mihi tamen rectius feciſſe videntur, qvi λόγον explicuêre, per *rationem*: ἀναλογίαν, per *proportionem*: quod & plurimis aliis, atq; inter eos, Finchio noſtro, in Geometria Rotundi, placuiſſe video. Vox vero ἀναλογία apud Platonem, Ariſtotelem, alioſque optimi ævi ſcrip-

ſcriptores Græcos, denotat ἰσότητα τῶν λόγων *æqvalitatem rationum*, vel ut Euclides loqvi amat, ὁμοιότητα τῶν λόγων *ſimilitudinem rationum*. Quas vero Euclides ſimiles eſſe ait, illas etiam æquales fatetur. Quæ enim ἀναλογίαν non habent, hoc eſt, quæ juxta Euclidem, ſimiles non ſunt, illas majores minoréſve vocat: unde ſimiles, neque majores erunt, neque minores; ideoque æquales. Theoni autem Smyrnæo ἀναλογία non illam tantum proportionem denotat, quæ vulgo Geometrica appellatur, eſtque duarum rationum æqvalitas: verùm etiam illam, quam vulgo Arithmeticam & Muſicam dicunt. Magnum enim naturæ miraculum eſt, res qvaſcunque ſolidas, ſi juxta certas rationes diviſæ, pulſentur, ſonos edere gratos ingratóſve. Cujus quidem rei, certam demonſtrationem ac regulam, primus Pythagoras inveniſſe traditur. Muſica enim ante ipſum per plurima ſecula inventa & uſurpata fuerat: quod, tam ex ſacris libris, quàm ex omni hiſtoria conſtat. Hoc vero Pythagoræum inventum, ejuſque occaſionem, totamque rei rationem, verbis potius Nicomachi Geraſeni, qvàm meis, recenſebo: ut infælicitas Critica ſeu Grammatica Meibomii, Lectori ab oculos ponatur: & quam malè ſibi conſulat, qui iſta aliis objicit, quorum ipſemet reus eſt. Narrat ergo Nicomachus Geraſenus in Enchiridio Harmonices libr. I. pag. ex editione Meibomii 11. & 12. Pythagoram, fabri officinam ingreſſum, animadvertiſſe, inæqvalis ponderis malleos inæquales & diſſimiles

ſonos edidiſſe, fixoque accuratè palo, chordas, cum his ponderibus, huic applicuiſſe, totamque rem inde perdidiciſſe. ἀπαρτήσας τεσσάρας χορδὰς ὁμούλους, καὶ ἰσοκώλους, ἰσοπαγεῖς τε καὶ ἰσοστρόφους, ἑκάστην ἀφ' ἑκάστης ἐξήρτησεν, ὁλκὴν προσδήσας ἐκ τοῦ κάτωθεν μέρους. Τὰ δὲ μήκη τῶν χορδῶν μηχανησάμενος ἐκ παντὸς ἰσαίτατα, εἶτα κρούων ἀνὰ δύο ἅμα χορδὰς, ἐναλλὰξ, συμφωνίας εὕρισκε τὰς προλεχθείσας, ἄλλην ἐν ἄλλῃ συζυγίᾳ. Τὴν μὲν γὰρ ὑπὸ τοῦ μεγίστου ἐξαρτήματος τεινομένην, πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ μικροτάτου, διὰ πασῶν, φθεγγομένην κατελάμβανεν. Ἦν δὲ ἡ μὲν δώδεκά τινων ὁλκῶν· ἡ δὲ ἕξ. Ἐν διπλασίῳ δὴ λόγῳ ἀπέφαινε τὴν διὰ πασῶν ὅπερ καὶ αὐτὰ βάρη ὑπέφαινε. Τὴν δὲ αὖ μεγίστην πρὸς τὴν παρὰ μικροτάτην, οὖσαν ὀκτὼ ὁλκῶν διὰ πέντε συμφωνοῦσαν· ἔνθεν ταύτην ἀπέφαινεν ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ, ἐν ᾧπερ καὶ αἱ ὁλκαὶ ὑπῆρχον πρὸς ἀλλήλας. Πρὸς δὲ τὴν μεθ' ἑαυτὴν μὲν τῷ βάρει, τῶν δὲ λοιπῶν μείζονα, ἐννέα σταθμῶν ὑπαρχοῦσαν, τὴν διὰ τεσσάρων, ἀναλόγως τοῖς βάρεσι, καὶ ταύτην δὴ ἐπίτριτον ἀντικρυς καταλαμβάνεται, ἡμιολίαν τὴν αὐτὴν φύσει ὑπάρχουσαν τῆς μικροτάτης. Τά γὰρ ἐννέα πρὸς τά ἓξ οὕτως ἔχει, ὅνπερ τρόπον, ἡ παρὰ τὴν μικρὰν, ἡ ὀκτὼ, πρὸς μὲν τὴν ἓξ ἔχουσαν, ἐπιτρίτῳ λόγῳ ἦν· πρὸς δὲ τὴν, τὰ δώδεκα, ἐν ἡμιολίῳ. Τὸ ἄρα μεταξὺ τῆς διαπέντε καὶ τῆς διὰ τεσσάρων,

τουτέ-

τουτέστι, ᾧ ὑπερέχει ἡ διὰ πέντε τῆς διὰ τεσσάρων, ἐβεβαιοῦτο ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ ὑπάρχειν, ἐν ᾧπερ τὰ ἔννεα πρὸς τὰ ὀκτώ. Ἑκατέρων τε ἡ διὰ πασῶν σύστημα ἐλέγετο, ἤτοι τῆς διὰ πέντε καὶ διὰ τεσσάρων ἐν συναφῇ, ὡς ὁ διπλάσιος λόγος ἡμιολίου τε, καὶ ἐπιτρίτου· τοῖον δώδεκα ἔννεα, ἕξ· ἢ ἀναστρόφως, τῆς διὰ τεσσάρων καὶ διὰ πέντε, ὡς τὸ διπλάσιον ἐπιτρίτου τε καὶ ἡμιολίου. οἷον δώδεκα, ἔννεα; ἕξ, ἐν τάξει τοιαύτῃ. Quæ quidem ita vertit Meibomius. *adpendens qvatuor chordas ejusdem materiæ existentes, tum æqve longas, & æque crassas, atque æque graves, singulis singula pondera appendit, alligata ex inferiori parte. Cumque ità chordarum longitudines omnino æqvales effecisset, pulsans deinde binas atque binas simul chordas alternatim, consonantias inveniebat ante dictas, aliam in alia combinatione. Namque à maximo pondere tensam, ad eam, qvæ à minimo, dia pason sonantem deprehendit. Erat autem illa duodecim qvarundam librarum: hæc vero sex. Atque ita in dupla ratione constituebat dia pason consonantiam, qvam & ipsæ gravitates ostendebant. Rursus maximam ad juxta minimam, qvæ octo librarum existebat diapente consonantem invenit. Unde hanc in ratione sesqvialtera constituit: in qva & ipsæ inter se erant libræ: Ad eam rursus qvæ hanc seqvitur, quod ad gravitatem istâ minorem, sed reliqvis majorem, qvæ novem pondo esset, ipsam diatessaron proportionaliter ipsis gravitatibus. Atque hanc superqvartam contra deprehendebat,*

debat, cum naturâ, eadem ſeſquialtera eſſet minimæ. Qvippe novem ad ſex ita habent, qvemadmodum qvæ juxta minimam eſt, octo libras habens, ad eam qvidem, qvæ ſex habet, in ratione erat ſuperqvarta: ſed ad eam, qvæ duodecim in ſeſqvialtera. Qvod itaque eſt inter diapente & diateſſaron, hoc eſt, qvo diapente conſonantia ſuperat diateſſaron, confirmatum eſt, in ſuperoctava eſſe ratione, in qva novem ad octo. Porro diapaſon conſonantia utrorumque ſyſtema dicitur: ſeu ipſius dia teſſaron & diapente, in conjunctione, ut dupla ratio ſyſtema eſt ſeſqvialteræ, & ſupertertiæ, in his numeris: duodecim, octo, ſex: aut contra, ipſius diateſſaron & diapente; ut duplum, ſupertertii & ſeſquialteri, utputa, in tali ordine, duodecim, novem, ſex. In qva ſane verſione plurima ſunt digna quæ carpantur. Verùm ego ea tantum attingam, qvæ præteriri neqveunt. Id ergo quod Nichomachus ἰσοστρέφους vocat, Meibomius æque graves vertit. Et ne fortè paulo lenius peccaret, mentem auctoris pervertendo, integram illam vocem, probam omnino & bonam, elidendam vult, aliamque intrudi, qvæ ad rem nihil facit. Audi criticam ejus in notis ad hunc locum *pag.* nempe 11. *V.* 25. ἰσοστρόφους. *Hoc vocabulum malè hic in omnibus codicibus legi puto. Scriberem* ἰσοῤῥόπων *vel* ἰσοστάθμων *æqvilibres, ejuſdem ponderis. Admodum in hoc experimento rectè capiendo circumſpectus fuit Pythagoras. qvippe chordæ ejuſdem debent eſſe* 1 *materiæ.* 2 *longitudinis* 3 *craſſitiei* 4 *ponderis. Uno horum reqviſitorum deficiente reliqva concidunt.*

Sed

Sed videris profecto Meibomi eo modo censuram de Musicis rebus ferre, quo cæcus de coloribus. Si enim Musicam unquam attigisses: non illam tantum qvæ assa voce, ut veteres ajunt, sed quæ chordis perficitur; ignorare non poteras, hæc quatuor in chordis requiri, ut sint ejusdem materiæ, æqualis longitudinis, æqualis crassitiei & præterea ἰσοστρόφους, hoc est, *æquè contortas*. Si enim duæ chordæ, ejusdem materiei, eandem longitudinem & crassitiem habuerint: etiam æqvalia pondera habebunt: adeoque, si juxta tuam censuram scripsisset Nicomachus, superflua posuisset, necessariis omissis. Duarum enim chordarum, ejusdem materiæ, longitudinis, & crassitiei, si una magis altera contorqueatur: differentem sonum edunt: quod, filiis Musicorum, imò, lippis & tonsoribus notum est. Nec quisquam id ignorat, qvi sciens vidensque res Musicas unqvam attigit. Beatum te sane Criticum! qui ut nobis monstres, te egregie doctum esse, & Græce, & Latine, ac Musices præterea peritum, auctorem mutilas: & quæ optimè dicta sunt, evertis, ut vanis tuis meditationibus locus pateat. Si talis Critica admittenda est: nihil usquam, in bonis auctoribus sani habebimus: omnia corrupta erunt & putida. Sed neque in Latinis felicior es. Qvid enim voces illæ tuæ *superqvartus*, *supertertius* & *superoctavus* Vocem ἐπίτριτος aliqvando vertis *superqvartus*, aliqvando *supertertius*. Ergóne hæc eadem tibi sunt, *superqvartus* & *supertertius*?

Imò verò, maxime Grammatice, qvi Scaligerum, Kircherum aliosq; omnes Latina vis docere, eorumque heic famam atque existimationem denigrare cupis, revoca nunc tibi in memoriam, aureum illud Delphicum Γνῶθι σεαυτὸν *Nosce teipsum.* Apud quos enim veteres Latinos scriptores hæc legisti? Crediderim, apud eosdem, ubi voces tuas, *excessivas* & *defectivas*, hoc est, nusquam. Tuum enim *nullibi* usurpare nolim. Eqvidem non tam ridiculus sum, ut leges optimis ingeniis præscriptas velim, ne qvicquam publici juris faciant, quod non omne juxta accuratas Grammaticorum præceptiones sit exactum. Quis enim tam stolidè audax est, ut optimas meditationes, & publice privatimque utilissimas, ideo premi censeret, quod mens rebus intenta, minutias hasce vel contempserit, vel sanè, tempus iis impendere noluerit? Imò, præter mentem aliqvando quædam verba aliter cecidére. Scio, multos ista nunc agere, & laureolam in mustaceo, hac in parte, quærere. Sed qui nucem frangere nequeunt, corticem arrodunt: & qui nihil in rebus ipsis jure carpere possunt, in verbis ingenium ostentant: eo maximè infœlices, quo se, quàm maximè fœlices existimant. Si enim ipsimet quicquam haberent, quo se doctis, sapientibusque viris probare possent; haud ad tam vilia descenderent. Verùm, cùm Meibomius censoriam heic auctoritatem, in alios magnæ eruditionis viros exerceat, quorũ vix umbram attingit: in memoriam illi revocare vole-

bam

bam Catonis illud. *Turpe est doctori, cum culpa redarguit ipsum.*

Et quam frigidum illud est, quod Scaligero in præfatione libri sui objicit. Verba ejus integra adscribam, ut τύφον hominis videas. *Qvam enim turpe est, quod Jos. Scaliger, vir in Græcis & Latinis literis summus,* ὀρθογώνιον ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ. *interpretatus sit, Clavium, aliosque, etiam doctos viros, seqvendo, rectangulum sub AB. BC. cum vertendum esset, rectangulum ab AB, BC. nempe contentum,* περιεχόμενον. *qvod verbi, brevitatis causa, Mathematici omittunt, ut & plerumque vocabulum* ὀρθογώνιον *rectangulum. Sed ad hujusmodi notanda nunc non descendemus. Quod si illa, quæ ex antiquis perperam versa sunt, etiam à solertissimo Mathematico, Federico Commandino, Græcæ lingvæ mediocriter perito, examinare vellem: rebus Mathematicis non parvam lucem me allaturum sperarem.* Sed quæsumus te Marce Meibomii, ne res Mathematicas attingas ulterius. Hoc enim opere tuo, magnas tenebras apud imperitos rerum, veritati offudisti. Et nisi meliora fuerint, quæ contra Commandinum habes, qvam qvæ contra Jos. Scaligerum: rectius tibi consules, si tacueris. Ast qvid haberes? cum hæc tua selectiora, nive Schytica frigidiora sint. Turpe ais esse, quod Scaliger ὀρθογώνιον ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ. interpretatus sit, *Rectangulum, sub AB. BC.* Nempe, ignorabas id, qvod Scaliger, non minus, qvàm Mathematici cognitum habent; aliud Græcis scriptoribus esse τὸ ὑπὸ AB.

ΑΒ. ΒΓ. aliud τὸ ἀπὸ ΑΒ. Τὸ ὑπὸ ΑΒ. ΒΓ. denotat qvodcunque rectangulum : τὸ ἀπὸ ΑΒ. solum qvadratum. Ita Euclides Elem. libro. X. Propositione XXV. & XXVI. Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν. Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ. ΒΓ. περιεχέσθω ὀρθογώνιον, τὸ ΑΓ. λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ μέσον ἄρα ἐστί. Qvod juxta verba ipsa ita vertendum est. *Quod sub mediis longitudine commensurabilibus rectis lineis comprehenditur rectangulum, medium est. Sub mediis enim longitudine commensurabilibus rectis lineis* ΑΒ ΒΓ *contineatur rectangulum* ΑΓ: *dico, quod* ΑΓ *medium sit. Describatur enim ab* ΑΒ *qvadratum.* ΑΔ *ergo medium erit.* Eundem usum harum vocum habes seqventi Propositione. Brevius autem hæc habentur apud Archimedem, demonstratione Prop. VIII. libri II. de Sphæra & Cylindro. Verba sunt ἔλασσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν θζη τοῦ ἀπὸ ζκ'. Τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν θζη πρὸς τὸ ἀπὸ ζκ' τουτέστιν ἡ ζθ πρὸς ζη ἐλάσσονα λόγον ἔχει, τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς κ'ζ, πρὸς τὸ ἀπὸ ζη. τὸ δὲ ἀπὸ κ'ζ πρὸς τὸ ἀπὸ ζη διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ κ'ζ πρὸς ζη. *Minus ergo id, quod sub* θζη *eo quod ab* ζκ (comprehenditur). *Id ergo quod sub* θζη *ad illud, qvod ab* ζκ, *hoc est*, ζθ, *ad* ηζ; *minorem habet rationem, qvàm id, qvod ab* κζ, *ad id, qvod ab* ζη. *Qvod vero ab* κζ (comprehenditur) *habet ad illud, qvod ab*

ab ζη, *duplicat am rationem*, *qvam* κζ *ad* ζη· Τὸ ὑπὸ denotat rectangulum qvodcunque: τὸ ἀπὸ ſolum qvadratum. qvod plurimis aliis locis liquet. Scaliger ergo aliique Geometræ, diſtinctas res diſtinctis vocibus explicuere. Neque dubito ſi Grammaticos conſulas, citius concedent, *comprehendi ſub* Latinum eſſe, qvam tuas illas voces, *ſuperiertius*, *ſuperoctavus* & *exceſſivas* ac *defectivas*. Imò, qvid ſi dicent *comprehendi ſub* æquè Latinum eſſe, ac *comprehendi ab*: & vel neutrum, apud optimos ſcriptores Latinos exſtare, vel utrumque? Quod ſi hæc, Latinè melius verſa volueris: Commandinus ille, qvem carpis, eleganter qvidem locum Euclidis tranſlatum tibi dabit; ut infœlicem planè illum eſſe oporteat, qvi te interpretem poſt Commandinum deſideret. Sed de his tuis erroribus Meibomi, ipſemet prius eum Grammaticis tranſige: anteqvam viros doctiſſimos, tantæque eruditionis, ut in his minutiis eruditionem nec ponant, nec qværant, leges injuſſus privatuſque præſcribere audeas.

Ut vero ad rem revertamur, deprendit Pythagoras, in omnibus ſonis, duplam tenſionem, ſive in chordis, ſive in tibiis, ſive alio qvocunque inſtrumento factam, ſemper harmoniam dare διὰ πασῶν, ſeu octavam, hoc eſt, qvæ inter *ut* & *ut*, *re* & *re*, *ſol* & *ſol* conſideratur. Seſqvialteram vero tenſionem, harmoniam dare διὰ πέντε ſeu qvintam, *ut ſol*, *re la*. Seſquitertiam autem, harmoniam dare διὰ τεσσάρων, ſeu qvartam, *ut fa*,

re sol, *mi la*. Ex divisione autem rationis sesqvialteræ per sesqvitertiam, fit ratio sesqvioctava. Reductis enim binis rationibus 3 ad 2, seu sesqvialtera, & 4 ad 3, seu sesqvitertia, ad commune consequens, ita ut sesqvialtera sit 9 ad 6, sesqvitertia 8 ad 6: si 9 ad 6 dividatur per 8 ad 6, facta ratio erit 9 ad 8, seu sesqvioctava. Inter διὰτεσσάρων autem & διαπέντε, seu qvartam & qvintam, intervallum est integrum: amboque toni integri. Ergo pro integro tono ponatur ratio ἐπὸγδοος seu sesqvioctava. Adeoque dato primo tono *ut*, pro secundo tono *re*, sumatur tensio ἐπόγδοος sesqvioctava. ut si tensio prima partium fuerit 192: tensio pro *re*, erit 216. ratio enim 216 ad 192 est, ut, 9 ad 8, seu sesqvioctava. Rursum pro integro tono *mi* sumatur proximè antecedentis tensionis sesqvioctava, hoc est, sumatur tensio 243 partium talium, qvalium tensio *re* est partium 216. Ratio enim 243 ad 216, est, ut 9 ad 8, seu sesqvioctava. Quod si ratio sesqvitertia dividatur per rationem duplicatam rationis sesqvioctavæ, hoc est, per rationem 81 ad 64: habebimus differentiam tensionis *mi* & *fa*. Nempe reducantur rationes 4 ad 3, seu sesqvitertia, & ratio 81 ad 64, seu duplicata rationis sesqvioctavæ, ad commune conseqvens: erit ergo ratio 256 ad 192 sesqvitertia: ratio autem 243 ad 192, duplicata rationis sesqvioctavæ, seu ut 81 ad 64. Ratio ergo facta ex divisione rationis 256 ad 192, seu sesqvitertiæ per ratiouem 87 ad 64, duplicatam rationis sesqvioctavæ est 256 ad

243:

243 : qvæ multo minor eſt ratione ſeſqvioctava. Ratio enim 273 fere ad 243, eſt ſeſqvioctava. Hanc ergo partem vocarunt Muſici λεῖμμα.

Atq; ex his intelligitur pulcherrimus ille Platonis locus, qvi eſt in Timæo, ſeu libro de Vniverſo: qvem quidem librum, tanti fecit Cicero, ut integrum in Latinam lingvam transfunderet: cujus verſionis inſigne fragmentum adhuc exſtat. Locus autem Platonis hic eſt. Μιγνὺς δὲ μετὰ τῆς οὐσίας, καὶ ἐκ τριῶν ποιησάμενος ἕν, πάλιν ὅλον τοῦτο εἰς μοίρας ὅσας προσῆκε διένειμεν· ἑκάστην δὲ ἔκ τε ταὐτοῦ, καὶ θατέρου, καὶ τῆς οὐσίας μεμιγμένην· ἤρχετο δὲ διαιρεῖν ὧδε. Μίαν ἀφεῖλε τὸ πρῶτον ἀπὸ παντὸς μοῖραν· μετὰ δὲ ταύτην ἀφήρει διπλασίαν ταύτης· τὴν δ᾽ αὖ τρίτην ἡμιολίαν μὲν τῆς δευτέρας, τριπλασίαν δὲ τῆς πρώτης, τετάρτην δὲ, τῆς δευτέρας διπλῆν. Πέμπτην δὲ, τριπλῆν τῆς τρίτης, τὴν δὲ ἕκτην τῆς πρώτης ὀκταπλασίαν. ἑβδόμην δὲ, ἑπτακαιεικοσαπλασίαν τῆς πρώτης. Μετὰ δὲ ταῦτα, ξυνεπλήρωσε τά τε διπλάσια, καὶ τριπλάσια διαστήματα, μοίρας ἔτι ἐκεῖθεν ἀποτέμνων, καὶ τιθεὶς εἰς τὸ μεταξὺ τούτων, ὥστε ἐν ἑκάστῳ διαστήματι δύο εἶναι μεσότητας, τὴν μὲν, ταυτῷ μέρει τῶν ἄκρων αὐτῶν ὑπερέχουσαν καὶ ὑπερεχομένην. τὴν δὲ ἴσῳ μὲν κατ᾽ ἀριθμὸν ὑπερέχουσαν, ἴσῳ δὲ ὑπερεχομένην. Ἡμιολίων δὲ διαστάσεων, καὶ ἐπιτρίτων, καὶ ἐπογδόων γενομένων, ἐκ τούτων τῶν δεσμῶν, ἐν ταῖς πρόσθεν διαστάσεσι, τῷ τοῦ ἐπογδόου διαστήματι, τὰ ἐπίτριτα πάντα ξυνεπληροῦτο, λείπων

αυ-

αὐτῶν ἑκάστου μορίον, τῆς τοῦ μόριου ταύτης διαστάσεως ληφθείσης, ἀριθμοῦ πρὸς ἀριθμὸν ἐχούσης τοὺς ὅρους ἓξ καὶ πεντήκοντα καὶ διακοσίων, πρὸς τρία καὶ τετταράκοντα καὶ διακόσια. Quæ qvidem ita Latinè protulit Cicero libro de Universo. *permiscens cum materia, cùm ex tribus effecisset unum, idipsum in ea qvæ decuit membra partitus est. Jam parteis singulas ex eodem & altero, & ex materia temperavit. Fuit autem talis illa partitio. Unam principio partem detraxit ex toto: secundam autem, primæ partis duplam: deinde tertiam, qvæ esset secundæ sesquialtera, primæ tripla: deinde qvartam, quæ secundæ dupla esset: qvintam inde, qvæ tertiæ tripla: tum sextam, octuplam primæ: postremo septimam, qvæ septem & viginti partibus antecederet primæ. Deinde instituit dupla & tripla intervalla explere, parteis rursus ex toto dissecans: qvas intervallis ita locabat, ut in singulis essent bina media: vix enim audeo dicere medietates, quas Græci* μεσότητας *appellant: sed quasi ita dixerim intelligatur: erit enim planius. earum alteram eadem parte præstantem extremis, eademque superatam: alteram pari numero præstantem extremis, parique numero superatam. Sesquialteris autem intervallis, & sesqvitertiis, & sesqvioctavis sumptis ex his colligationibus in primis intervallis, sesquioctavo intervallo, sesqvitertia omnia explebat, cum particulam singulorum relinqveret. Ejus autem particulæ intervallo, habebat numerus ad numerum eandem proportionem comparationemque in extremis, qvam habent*

bent CCLVI. cum CCXLIII. Nempe harmoniam Universi explicaturus Plato eandem in toto esse existimavit, qvā in omnibus & singulis partibus animadverterat. Et cum omnia ex numero, pondere, ac mensura constent; numerus autem omnis, vel par sit, vel impar: omnia autem corpora, superficiem habeant & soliditatem, qvæ per quadrata & cubos optimè explicantur: ex unitate, qvæ tam in singulis corporibus, quam in toto conspicitur, & ex binario, inter pares numeros primo, & ex ternario primo impari numero, horumque qvadratis & cubis, omnium naturam dependere affirmavit. Qvippe, cùm & totum Universum unum sit, & singula in hoc universo unum: omnia autem ex plurimis corpusculis componantur, qvæ rursum ex aliis corpusculis coagmentantur, partim numero paribus, partim imparibus: coagmentata autem, unum corpus generant, superficie & soliditate prædītum: corpus ergo hoc natura unum, ex paris & imparis numeri quadratis cubisque cônstat: adeoque, & duplum habet, & triplum, & qvadruplum, & noncuplum, & octuplum, & vigecuploseptuplum. Intervalla autem hæc dupla triplaque, eo modo sunt disposita, & ita inter se combinata, ut convenientiam invicem habeant, gratamque harmoniam faciant: qvod experimento, in omnibus corporibus sumpto demonstratur. Erunt ergo intervalla hæc medietatibus qvibusdam harmonicis conjuncta, qvarum quidem una, eadem parte minus extremum excedit, qva

ab altero extremo ſuperatur: altera aurem medietas eodem numero ab uno extremo ſuperatur, qvo alterum excedit. Ut ſi minus extremum fuerit 6. majus, duplum hujus, erit 12. medietas autem inter duo hæc extrema 8 & 9. Excedit autem octonarius ſenarium tertia parte ſenarii. nempe binario, qvi eſt triens ſenarii: à duodenario autem ſuperatur octonarius qvaternario, qvi eſt triens duodenarii: adeoque octonarius tertia parte ſenarii excedit ſenarium, tertia autem parte duodenarii exceditnr à duodenario: hoc eſt, eadem parte extremorum excedit & exceditur. Novenarius autem excedit ſenarium ternario: exceditur autem à duodenario, etiam ternario, hoc eſt, eodem numero excedit & exceditur. Inter binas autem haſce medietates ratio eſt ἐπόγδοος ſeu ſeſqvioctava. Unde poſitis hiſce binis: cœtera ſpatia ſeſqvioctavis explentur. Adeoque, ſecundus tonus eſt ſeſqvioctavus primi: tertius autem, ſeſqvioctavus ſecundi. Qvartus autem tertii ſeſqvioctavus non eſt: ſed rationem habet in numeris, qvam 256 ad 243. cujus cauſa antea à nobis fuit explicata. Rurſum, inter ſeſqvialteram & duplam, ponitur ſeſqvioctava: & rurſum, hujus ſeſqvioctava. Adeoque, poſito in medio ſeſqvitertio, cœtera omnia ſeſqvioctavis explentur. Id autem in numeris plenius explicatur: ponendo primũ numerũ 384. qvi enim ante ipſum numeri, omneshaſce proportiones non admittunt. Sumatur enim dimidius hujus 192. erit ergo ſonus 384 ad 192 διὰ πασῶν.

Pri-

Primus autem ἐπόγδοος eſt 216ſeu *re*. Eſt enim 216 ſeſqvioctavus numeri 192. Illius autem ſeſqvioctavus ſeu *mi* eſt 243. Primi autem numeri ſeſqvitertius eſt 256. Græcis διατεσσάρων vulgo *fa*. Hujus autem ſeſqvioctavus, primi vero ſeſqvialter eſt 288, διαπέντε ſeu *ſol*: cujus ſeſqvioctavus eſt 324. *la*. Hujus autem ſeſqvioctavus non datur.

Poſito autem 384 primo numero, erit ſeſqvioctavus, ſeu *re*, 432: & hujus ſeſqvioctavus, ſeu *mi*, 486. & ſeſqvitertius primi, ſeu *fa*, 512. & ſeſqvioctavus hujus, vel primi ſeſqvialter, qvi eſt *ſol*, 576. Græcis διαπέντε: hujuſque ſeſqvioctavus *la* 648. & hujus rurſum ſeſqvioctavus *ſi* 729. denique duplus primi, qvarti vero ſeſqvialter, & qvinti ſeſqvitertius eſt 768 διαπασῶν, ſeu octava *ut*. Ob qvam etiam cauſam Timæus Locrus apud Platonem hunc numerum animæ nundi tribuit, primamque vocat: ὡς μὴ ἀγνοεῖν ἐξ ὧν ἡ ψυχὰ καὶ δι' ὧν συνεστάχει, ἂν οὐχ ὑστέραν τᾶς σωματικᾶς οὐσίας συνετάξατο ὁ Θεὸς, ὥσπερ λέγομες ἄμμες (πρότερον γὰρ τὸ τιμιώτερον καὶ δυνάμει καὶ χρόνῳ) ἀλλὰ πρεσβυτέραν ἐποίει, μίαν ἀφαιρέων τὰν πρώταν, μονάδων οὖσαν τεττόρων ποτὶ ὀκτὼ δέκασι, καὶ τρισὶν ἑκατόντασι. *Ut qvidem minimè incognitum eſſe poſſit, ex qvibus, & per qvæ hæc (mundi) anima cônſtituta: qvam, non ultimam ordinavit Deus poſt corpoream iſtam eſſentiam, ut nos affirmamus: (illud enim qvod honoratius eſt, & poteſtate, & tempore prius) ſed antiqviorem creavit, unam hanc primam auferens, qvæ unitatum erat qvatuor,*

& octo praeterea denariorum, & trium centenariorum hoc eſt in numeris CCCLXXXIV. Has autem medietates Theo Smyrnæus certam qvandam ἀναλογίαν ſeu proportionem generare dicit, ab ἀναλογία illa qvam Geometræ conſiderant diverſam. Quem ſecuti poſtea auctores Latini, proportionum varia genera fecerunt, & aliam qvidem vocarunt Geometricam, quando eadem eſt ratio unius extremi ad medium, qvæ, medii ad alterum extremum: aliam Arithmeticam, qvando eodem numero, & majus extremum excedit medium, & medium excedit minus extremum: aliam Muſicam, qvando, eâdem ſui parte, majus extremum excedit medium, qva extremi minoris parte medium excedit minus extremum. Equidem non multis heic diſputabo, an benè & commodè, vel à Theone Smyrnæo, vel ab aliis Geometris, hæ proportiones vocentur? Neque enim de vocibus cum aliqvo contendere voluerim. Sufficit enim nobis, qvod intelligamur. Id tamen indicatum Lectori velim, me qvando proportionem ſimpliciter nomino, ſemper, ex Veterum Geometrarum more, eam intelligere ἀναλογίαν qvæ vulgo Geometrica appellatùr. Et de hac intelligendi ſunt Veteres Geometræ, qvando ἀναλογίαν nominant. Quod, ſi Meibomius diligentius obſervaſſet, aliqvot forte errores vitâſſet, ut jam ſtatim demonſtrabimus.

CAP.

CAP. XIV.

Ex iis autem qvæ hucuſque de compoſitione & diviſione rationum, diligentius atque accuratius diſputavimus: hoc inter alia liqvet; auctis antecedentibus qvarumcunque rationum; ipſas rationes augeri: & antecedentibus imminutis; etiam ipſas rationes diminui. Nempè, qvocunque modo, antecedens augetur, eodem retento conſeqvente; ratio ipſa componitur: & qvocunqve modo, antecedens imminuitur; ratio ipſa dividitur. Mutato autem ordine, in ea compoſitione quæ fit multiplicando, ſi conſeqventia diminuantur, antecedente eodem retento; ratio ipſa diminuitur: ſi vero conſeqventia augeantur; ipſa ratio imminuitur. In ratione enim $\zeta\upsilon$ ad $\phi\varepsilon$ ſi antecedens $\zeta\upsilon$ augeatur, fiatque æqualis ipſi $o\mu$: erit ratio eadem quæ $o\mu$ ad $\phi\varepsilon$. At $o\mu$ ad $\phi\varepsilon$ eſt duplicata rationis $\zeta\upsilon$ ad $\phi\varepsilon$, adeoque major. Unde aucto antecedente $\zeta\upsilon$ & æqvali conſtituto ipſi $o\mu$: erit ratio ipſa aucta. Quod ſi in eadem ratione, $\zeta\upsilon$ ad $\phi\varepsilon$, conſeqvens imminuatur, fiatque æqvale ipſi $\theta\delta$, erit ratio facta æqvalis rationi $\zeta\upsilon$ ad $\theta\delta$. Hæc autem dupla eſt rationis $\zeta\upsilon$ ad $\phi\varepsilon$, adeoqve major.

Eodem modo in ratione defectûs $\phi\varepsilon$ ad $o\mu$, ſi $\phi\varepsilon$ antecedens terminus augeatur, fiatque æqvalis ipſi $\zeta\upsilon$: erit ratio $\zeta\upsilon$ ad $o\mu$, duplicata rationis $\phi\varepsilon$ ad $o\mu$, ut capite XII. demonſtravimus: adeoque major ratione $\phi\varepsilon$ ad $o\mu$. Si vero conſeqvens imminuatur, etiam ratio

tio aucta erit. Ut, in ratione $\phi\varepsilon$ ad $o\mu$. si conseqvens terminus $o\mu$ imminuatur, fiatque æqvalis ipsi $\zeta\nu$, erit ratio facta æqvalis $\phi\varepsilon$ ad $\zeta\nu$. Est vero ratio $\phi\varepsilon$ ad $\zeta\nu$ duplicata rationis $\phi\varepsilon$ ad $o\mu$. ut demonstratum fuit cap. *XII.* ergo & ratio facta erit major.

Quod si antecedens imminuatur, aut conseqvens augeatur: ipsa ratio minor fiet. In ratione enim excessus $o\mu$ ad $\phi\varepsilon$, si antecedens terminus $o\mu$ imminutus, æqualis fiat ipsi $\zeta\nu$, erit ratio facta æqvalis rationi $\zeta\nu$ ad $\phi\varepsilon$. Est vero ratio $\zeta\nu$ ad $\phi\varepsilon$ minor quam $o\mu$ ad $\phi\varepsilon$, utpote ejusdem subduplicata. Ergo & facta hoc modo ratio minor erit. Aucto autem conseqvente $\phi\varepsilon$, & æqvato ipsi $\zeta\nu$, erit ratio facta æqvalis $o\mu$ ad $\zeta\nu$, qvæ minor est ratione $o\mu$ ad $\phi\varepsilon$, utpote ipsius subduplicata. Hoc ipsum in rationibus defectûs locum habet. In ratione enim $\phi\varepsilon$ ad $\zeta\nu$, si antecedens imminuatur, fiatq; æqvale ipsi $\theta\delta$, erit ratio facta æqvalis rationi $\theta\delta$ ad $\zeta\nu$, qvæ minor est ratione $\phi\varepsilon$ ad $\zeta\nu$, utpote subduplicata ejusdem. Si vero in eadem ratione $\phi\varepsilon$ ad $\zeta\nu$, conseqvens terminus $\zeta\nu$ augeatur, fiatque siqvalis ipsi $o\mu$: ratio facta erit æqualis rationi $\phi\varepsilon$ ad $o\mu$, qvæ minor est ratione $\phi\varepsilon$ ad $\zeta\nu$, utpote subduplicata ejusdem. Atque hoc in omni antecedentium augmento, conseqventiúmve decremento; tum qvoqve in omni antecedentium decremento, conseqventiúmve augmento, eodem modo se habet. Id ipsum enim, qvod in ratione duplicata & subduplicata contingit, etiam in cœteris omnibus contingit tàm triplicata & subtriplicata,

qvam

qvam qxadruplicata, ſeſqviplicata, & ſic in infinitum: cujus rei demonſtatio ex capite *XII*: petatur.

Quibus explicatis, facilè intelligitur, qvæ ratio major ſit: & qvæ minor? Nempe, ſi datæ qvæcunque rationes, ad idem conſeqvens reducantur; cujus antecedens majus eſt, illa ratio major: cujus verò antecedens minus eſt, illa ratio minor. Sumantur enim in figurâ *XIX* duæ rationes, ρβ ad φε, & ομ ad πυ, reducanturq; ambæ ad commune conſequens, nēpe φε, ſitq;, ut ομ ad πυ, ſic θδ ad φε erit ergo ratio ρβ ad φε minor qvā θδ ad φε, cum antecedens illius, minus ſit antecedēte hujus: adeoq; ratio ρβ ad φε minor erit ratione ομ ad πυ.

Eſt ergo hæc breviſſima atq; expeditiſſima methodus inveniendi, in datis qvibuſcunque rationibus, quæ inter eas major ſit, & quæ minor. Reducantur ambæ ad idem conſeqvens: & tùm illa ratio minor erit, cujus antecedens minus: illa autem major, cujus antecedens majus. Atque hoc non tantum verum eſt, quando duæ rationes exceſsûs, aut duæ rationes defectûs comparantur invicem: ſed etiam, qvando ratio exceſsûs comparatur cum ratione defectûs, & contra. Eadem enim ratio obtinet, neque minori id evidentia demonſtratur. Cum enim in omnibus rationibus exceſsûs antecedens majus ſit conſequente: in rationibus verò defectûs antecedens minus ſit conſeqvente: ergo reductis binis talibus qvibuſcunque rationibus ad idem conſequens, erit ratio exceſsûs ſemper major ratione defectûs. Eqvidem, quamvis hoc

hoc ipſum per ſe ſatis clarum ſit: alia tamen demonſtratione, id ipſum clarius explicabo. Conſtat ex iis quæ hucuſque fuere demonſtrata, in omnibus rationibus, tam exceſsûs quam defectûs, quo majora fuerint antecedentia, eo majores eſſe rationes: & quo minora fuerint antecedentia, eo minores eſſe rationes. Adeoque, ratio dupla minor eſt qvam tripla, & hæc qvam qvadrupla. Eodem modo, ratio ſubdupla major eſt qvam ſubtripla, & hæc, qvam ſubqvadrupla. Subdupla enim ratio eſt, qvando antecedens conſequentis dimidium fuerit, adeoque, conſequens antecedentis duplum. Subtripla autem, qvando antecedens tertia pars ſeu triens fuerit conſequentis, adeoque conſeqvens triplum antecedentis. Sic in ratione ſubqvadrupla conſeqvens antecedentis eſt qvadruplum. At qvo majus conſeqvens, eodem retento antecedente: eo minor ratio. Subqvadrupla ergo ratio, minor qvam ſubtripla: & hæc, qvam ſubdupla. Sit enim $\phi\chi$ in fig. XIX dupla ipſius $\theta\lambda$, tripla autem ipſius $\zeta\nu$, qvadrupla autem ipſius $\alpha\eta$. Ratio ergo $\alpha\eta$ ad $\phi\chi$ minor erit qvam $\zeta\nu$ ad $\phi\chi$: & $\zeta\nu$ ad $\phi\chi$ minor erit qvam $\theta\lambda$ ad $\phi\chi$: cum $\alpha\eta$ antecedens ſit minus qvam $\zeta\nu$, & $\zeta\nu$ antecedens minus qvam $\theta\lambda$. Eſt vero $\alpha\eta$ ad $\phi\chi$ ſubqvadrupla, $\zeta\nu$ autem ad $\phi\chi$ ſubtripla, & denique $\theta\lambda$ ad $\phi\chi$ ſubdupla. Ratio ergo ſubqvadrupla eſt minor qvam ſubtripla, & hæc minor qvam ſubdupla. Atque ſic in infinitum. Comparentur nunc invicem rationes duæ, una exceſsûs, altera defectûs: nempe, tripla cum ſub-

ſubtripla, & dupla cum ſubdupla, ſeu dimidia. Jam neminem ego adeo mente captum arbitor; ut dimidiam rationem ſeu ſubduplam, dupla majorem dicat: adeoque nec ſubtriplam tripla. Marcus qvidem Meibomius, contra communem mentis intellectum, dimidiam rationem ſeu ſubduplam æqvalem ait eſſe duplæ: majorem autem dicere non audet. Et ſane, qvis mortalium, iſtum hominem ſanâ mente præditum, arbitretur? qvi, dimidium alicujus magnitudinis, ejuſdem, vel æqvalis magnitudinis, duplo, æqvale majúſve diceret. Verum de iſta Meibomii abſurda opinione poſtea agemus. Nunc illud tantum ſupponimus, rationem dimidiam ſeu ſubduplam non eſſe majorem ratione dupla: neque ſubtriplam, majorem tripla, & ſic in infinitum. Dico autem, rationem ſubduplam, neque æqvalem eſſe duplæ: neque ſubtriplam, triplæ. Ideoque, cùm neque æqvalis ſit; neq; major: ergo minor erit. Et ſubtriplam qvidem rationem tripla eſſe minorem, ita demonſtratur. Cum enim ratio ſubdupla, ratione duplâ major non ſit; ſed vel minor, vel ex falsâ Meibomii ſententia eidem æqvalis: erit utique ratio ſubdupla, minor ratione tripla; qvandoqvidem ratio dupla, minor eſt ratione tripla. Atqui ratio ſubtripla, minor eſt ratione ſubdupla: qvandoqvidem, hujus antecedens, ſi ambæ rationes ad commune conſequens reducantur, majus ſit, antecedente alterius. At qvarum rationum antecedentia, reſpectu ejuſdem conſeqventis, ſunt majora;

jora; illæ etiam rationes ſunt majores: & qvarum antecedentia ſunt minora, illæ etiam rationes ſunt minores' ut principio hujus capitis demonſtratum fuit. Ratio ergo ſubtripla, cum minor ſit ratione dupla; etiam minor erit ratione triplâ: cum ſubdupla ratio minor ſit ratione triplâ. Eodem plane modô, ratio ſubdupla demonſtratur, minor eſſe ratione dupla. Sumptis enim binis rationibus, una exceſsûs, altera defectûs, nempe ſeſqvialtera & ſubſeſqvialtera: erit ratio ſeſqvialtera minor ratione duplâ: adeoque, & ſubſeſqvialtera minor erit ratione dupla. Ratio autem ſubdupla, minor eſt ratione ſubſeſqvialterâ; cum hujus antecedens, reſpectu ejuſdem conſeqventis, majus ſit antecedente illius. Ratio ergo ſubdupla, minor eſt ratione duplâ.

Facile ergo ex his perſpicitur: qvid æqualis ratio ſit, & qvæ major, qvæve minor? Nempè, reductis, datis qvibuſcunque binis rationibus, ad idem conſeqvens: ſi antecedentia æqvalia fuerint; erunt rationes æqvales: ſi vero inæqvalia; illa ratio minor, cujus antecedens minus: illa vero major, cujus antecedens majus. Qvod in omnibus omnino rationibus verum eſſe, hucuſque demonſtravimus. Euclides autem, vel ſi mavis Eudoxus (cujus, librum qvintum Elementorum eſſe, auctor ſcholii illius in V. librum teſtatur) aliam plane definitionem rationum æqvalium & inæqvalium nobis dedit; longe qvidem eâ obſcuriorem, qvam propoſuimus: veram tamen ac minime fal-

falſam, prout contra Meibomium nunc monſtrabimus. Et de æqualium qvidem rationum definitione, quas Euclides vel Eudoxus eaſdem vocat, nullam nobis litem movet Meibomius. Quoniam tamen poſterior definitio rationum inæqualium, ſeu majorum minorumque, ex illa debeat explicari: utramque Geometrice demonſtrabimus.

CAP. XV.

Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ ληφθέντα κατάλληλα. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα μεγέθη λόγον, ἀνάλογον καλείσθω. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων, τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, εἴπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

In eadem ratione, magnitudines eſſe dicuntur, prima ad ſecundam, & tertia ad qvartam, qvando primæ & tertiæ æqvemultiplices, ſecundæ & qvartæ æqvemultiplices, juxta qvamcunque multiplicationem, utraque utrámque, vel una ſuperant, vel una æqvales ſunt, *vel*

vel una deficiunt inter ſe comparatæ. Qvæ vero, eandem habent rationem, magnitudines, proportionales vocentur. Qvando autem æque multiplicium, multiplex qvidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundæ: multiplex vero tertiæ non ſuperaverit multiplicem qvartæ, tunc prima ad ſecundam majorem rationem habere dicitur, qvam tertia ad quartam. His verbis definitio rationum æqvalium & inæqvalium ab Euclide libro V. Elementorum concipitur. Notandum autem eſt, ea verba, qvæ in priore definitione rationum, nempe, æqvalium ſeu earundem, reperiuntur, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμόν *juxta qvamcunque multiplicationem*, etjam in poſteriore definitione eſſe repetenda: cum aliàs ipſa definitio nimis ſit anguſta: qvod ipſe quoque Meibomius verum ſupponit. Id vero mirari ſatis nequeo, quid, vel Euclidem, vel Eudoxum moverit, ut definitionis loco hæc ſupponeret: alia vero hinc demonſtraret longè his clariora. Qva qvidem in re ejuſdem criminis accuſari poteſt, cujus in priore libro reum ex Proclo peregimus Apollonium: nempè, quod dum res manifeſtas demonſtrare conatur, ea quæ magis obſcura ſunt, & quorum veritates minus perſpicuæ, cogatur ſupponere. Definitiones enim Geometricæ explicant paucis tantum verbis, iiſque perſpicuis, quid illud ſit quod definimus. Et tales noſtræ ſunt, capite hujus libri VII. *Æqvales rationes dicuntur, qvæ ſe invicem, nec majores ſunt, nec mino-*

minores. Ratio autem, altera ratione major dicitur, quæ æqvalem excedit. Minor vero qvæ ab æqvali deficit. Qvod autem antecedentia æqvalium rationum juxta qvamcunque multiplicationem æquemultiplicata simul excedant consequentium æquemultiplices; inæqvalium vero rationum non item: id demonstratione qvadam & explicatione satis operosa indiget. Saltem, obscurius hoc est, qvam illud, quod inter propositiones V. libri Elementorum demonstratur, *Æqvalia ad idem eandem habere magnitudinem.* Atque hac qvidem in parte non ab omni culpa liber est auctor hujus operis, sive Euclides is est, sive Eudoxus. Neque tamen hæc movet Meibomius; sed unam ex hisce definitionibus falsam esse ait, nempe rationum inæqvalium. Eqvidem Euclides solam majorem rationem definit: minoris vero naturam ex opposito intelligi vult. Quod autem malè falsitatis à Meibomio accusetur, id nunc demonstrabimus. Et ut hæc quoque ab Euclide præter leges Geometricas allata certam demonstrationem habeant: tres hasce Propositiones in medium adducam; quæ si Geometris placuerint: Euclideis pro explicatione adjungantor.

Propositio I.

Si duæ quæcunque finitæ magnitudines æquemultiplicentur; habebunt earum æquemultiplices eandem inter se rationem, qvam magnitudo ad magnitudinem: & multiplum primæ magnitudinis, ad primam magnitudi-

nem, eandem habebit rationem, qvam, multiplum secundæ magnitudinis, ad secundam.

Sint enim, in diagrammate hujus libri *XX*, AE & AD qvæcunque magnitudines, quæ, æquemultiplicatæ, faciant qvascunque magnitudines, v. g. AF & AG, vel AH & AI, vel AK & AL, vel denique AC & AB: dico, ut, AE ad AD, sic AF ad AG, & AH ad AI, & AK ad AL, & AC ad AB. Vel enim AE, æqvatur ipsi AD, vel non æquatur. Si æquatur: ergo per Axioma VI. libri I. Elem. æquemultiplicia eorum inter se erunt æqualia. Eodem enim jure, quo ejusdem vel æqualium magnitudinum dupla, inter se sunt æqualia, etiam tripla erunt æqualia; & qudrupla; & decupla; & millecupla, & sic in infinitum. Si vero inæqualia fuerint: unum ergo majus erit, alterum minus. Sit AE major magnitudo; AD autem minor: erectaque ex D perpendiculari quacunque, ita ut angulus ad D sit rectus; conjungantur AE & AD circa A: ita ut faciāt, cum perpendiculari, triangulum AED. Multiplicetur nunc linea AD, ita ut duplum ejus sit AG, triplum *AI*, quadruplum AL, & sic in infinitum. Producatur AE versus E infinitè v. causa in M. eductisque ex G. I. L. B. perpendicularibus usque dum secent AM. infinitè eductam: dico singula segmenta, dare duplum, triplum, qvadruplum, qvintuplum ipsius AE: hoc est, perpendicularem ex G secare AM. in F, ita ut AF sit dupla ipsius AE: perpendicularem vero ex *I* secare AM in H, ita ut AH sit tripla ipsius AE,

AE, ſicut AI eſt tripla ipſius AD, Atque eodem modo perpendicularem ex L. ſecare AM in K: ita ut AK ſit qvadrupla ipſius AE. rurſumque perpendicularem ex B ſecare AM in C, ita ut AC ſit qvintupla ipſius AE. Quoniam enim DE. GF. IH. LK. BC ſunt perpendiculares ejuſdem rectæ AB: ergo inter ſe omnes ſunt parallelæ: adeoque erit, ut AD ad AG, ſic AE ad AF: & ut AD ad AI, ſic AE ad AH: & ſic in ſequentibus. Vel, alia methodo, jungantur EG & DF. qvoniam ergo triangula hæc EFD, & EGD ſunt in eadem baſi ED, & inter eaſdem parallelas ED. FG: erunt triangula invicem æqualia. Eſt vero triangulum AED, etiam æquale triangulo EGD, utpote in eadem altitudine, & in æqvalibus baſibus. AG enim dupla eſt ipſius AD, adeoque DG æqualis ipſi AD. Quæ autem eidem æqualia, etiam invicem ſunt æqvalia. Eſt ergo triangulum EFD æquale triangulo AED. Sunt vero in eadem altitudine. erunt ergo & baſes æqvales per I. Sexti Elem: adeoque EF æqualis ipſi AE. Tota ergo AF erit dupla ipſius AE. Jungantur porro EI & DH. quoniam ergo triangula EID, & EHD ſunt inter eaſdem parallelas ED & HL, & ſuper eadem baſi ED, erunt invicem æqualia. Eſt vero triangulum EID duplum trianguli ADE. Sunt enim in eadem altitudine: adeoque, ſe habent invicem, ut baſes. DI autem, dupla eſt ipſius AD. tota enim AI, tripla eſt ipſius AD. Triangulum ergo DHE erit duplum trianguli ADE. Sunt vero hæc triangula in eadem altitudi-

tndi-

tudine. Ergo & basis HE baseos AE dupla erit: adeoque, tota HA, tripla erit ipsius AE. Eodem modo junctis EL. & DK. demonstratur EK esse tripla ipsius AE, adeoque AK, qvadrupla esse ipsius AE. Et sic AC ipsius AE qvintupla. Rectæ ergo AF & AG sunt æquemultiplices AE & AD. Tum quoque AH & AI. & rursum AK & AL. & denique AC & AB. æquemultiplices ipsarum AE & AD. Est autem, ut AD ad AG, sic AE ad AF. & ut AD ad AI, sic AE ad AH. vel, ut AD ad AE, sic AG ad AF, & AI ad AH, & AL ad AK, & AB ad AC. Rectæ enim DE, GF, HI, KL, CB, sunt parallelæ, utpote eidem rectæ perpendiculares. Ut ergo magnitudo ad magnitudinem, sic æquemultiplices ad æqvemultiplices. Rursum ut AF ad AE, sic AG ad AD, & ut AH ad AE, sic AI ad AD. Ut ergo, æqvemultiplex primæ, ad primam magnitudinem; sic, æqvemultiplex secundæ, ad secundam. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO II.

Si fuerint qvatuor magnitudines, qvarum prior ad secundam, eandem habet rationem, qvam tertia ad qvartam, antecedentia vero qvacunque multiplicatióne modo ambo eadem multiplicentur: tum qvoque conseqventia, qvacunque multiplicatione, sed ambo eadem, multiplicentur: dico, si multiplum primæ, excedat multiplum secundæ; etiam multiplum tertiæ, excedere multiplum qvartæ:

& si

& si deficiat; deficere : & si æqvetur; æqvari. Et vice versa, *si antecedentibus æquemultiplicatis, & consequentibus etiam æquemultiplicatis; multiplicia antecedentium, simul excedant multiplicia consequentium; simúlve ab iis deficiant, aut simul æqventur, in omni multiplicatione: tum primam, ad secundam, eandem habere rationem, qvam tertia, ad qvartam.*

Sint enim in figura num. XXI. magnitudines *AB. AC. AD.* & *AE*: & sit, ut, *AB* ad *AC*: sic *AD* ad *AE*. Æquemultiplicentur *AB* & *AD*, nempe qvintuplicentur, faciantq; *AF* & *AG*. *AC* autem & *AE*. conseqventia etiam æqvemultiplicentur, faciantque duplicata *AH* & *AI*; triplicata autem, *AM* & *AL*: dico, si *AF*, multiplex primæ, seu *AB*, superaverit *AH* multiplicem secundæ seu *AC*: etiam *AG* multiplicem tertiæ superare *AI*, multiplicem qvartæ. Et si *AF* multiplex primæ, minor fuerit qvam *AM* multiplex secundæ: etiam *AG* multiplicem tertiæ, minorem esse *AL* quæ est multiplex *AE*, seu qvartæ: & si æqvetur, æqvari. Quoniam enim demonstratum fuit præcedente propositione, æqvemultiplices duarum magnitudinum eandem invicem habere rationem, qvàm magnitudo prima ad secundam: erit ergo, ut, *AB* ad *AD*, sic *AF* ad *AG*. Sunt enim *AF* & *AG* æqvemultiplicia magnitudinum *AB* & *AD*. Et rursum, ut, *AC* ad *AE*, sic *AH* ad *AI*. Sunt enim *AH* & *AI* æquemultiplicia magnitudinum *AC* & *AE*. At vero ex constructione, est, ut, *AB* ad *AC*, sic *AD*

ad *AE*: vel, ut, *AB* ad *AD*, sic *AC* ad *AE*. Erit ergo, ut *AB* ad *AD*, hoc est, ut *AF* ad *AG*; sic *AC* ad *AE*, hoc est, sic *AH* ad *AI*, vel *AM* ad *AL*. Si ergo *AF* multiplex primæ, seu *AB*, superaverit *AH* multiplicem secundæ; etiam *AG* multiplex tertiæ superabit *AI* multiplicem qvartæ. Est enim, ut, *AF* ad *AH*, sic *AG* ad *AI*. Et, si *AF* multiplex primæ, minor fuerit qvàm *AM* multiplex secundæ: etiam *AG* multiplex tertiæ, minor erit qvam *AL* multiplex qvartæ. Est enim, ut *AF* ad *AM*, sic *AG* ad *AL*. Deniqve, si multiplex *AC* æqvalis fuerit multiplici *AB*, etiam multiplex *AE*, æqvalis erit multiplici *AD*.

Pro altera autem parte propositionis demonstranda, sit *FA* & *GA* æqvemultiplicia antecedentium *AB* & *AD*, qvæ qvidem juxta qvamcunqve multiplicationem, simul excedant æqvemultiplicia, conseqventium *AC* & *AE*; simulq; deficiant, aut simul æqventur: dico *AB* ad *AC* eandem habere rationem, qvam *AD* ad AE. Quod in omni hac multiplicatione verum est. Si enim adversarius hoc negaverit, dixeritq;, antecedentia qvidem æqvemultiplicata juxta qvamcunqve multiplicationem, simul exedere æqvemultiplicia conseqventium &c. non tamen ideo rationes esse easdem seu æqvales: sit ergo una qvidem ratio AB ad AC, altera autem AP ad AE, qvarum antecedentia ex adversarii hypotesi æqvemultiplicata juxta qvamcunqve multiplicationem

nem simul excedant æqvemultiplicia conseqventium: nec tamen ipsæ rationes sint æqvales. Quintupletur AP. sitqve AQ. Retentis ergo prioribus, qvintuplum qvidem AB, unius antecedentis, est AF: qvintuplum verò alterius antecedentis, nempè AP; est AQ. Ex prioribus autem, duplum ipsius AC, priorisnempe conseqventis est, AH; duplum verò AE posterioris conseqventis, est AI. Excedit autem AF æqvemultiplex unius antecedentis ipsam AH æqvemultiplicem sui conseqventis. AQ autem æqvemultiplex alterius antecedentis, non excedit AI æqvemultiplicem alterius conseqventis: ergo non simul excedunt æqvemultiplicia antecedentium æqvemultiplicia conseqventium: qvod est contra hypothesin. Supponitur enim æqvemultiplicia simul excedere. Quascunqve ergo rationes inæqvales sumat adversarius, statim demonstratur æqvemultiplicia antecedentium, non simul excedere æqvemultiplicia conseqventium juxta qvamcunqve multiplicationem: adeoqve aliqvid concludi, qvod est contra hypothesin. Liqvet ergo, propositum verum esse.

Propositio III.

Si qvatuor magnitudinum, prima & tertia qvacunq; multiplicatione æqnemultiplicentur, ac secunda & quarta etiam qvacunque multiplicatione æquemultiplicentur: æquemultiplex autem primi, excedat æquemultiplicem secundi, sed æquemultiplex tertii non excedat æquemultiplicem

 quar-

quarti: erunt duæ illæ rationes inæqvales; & illa qvidem major, cujus antecedentis æqvemultiplex, conſequentis æquemultiplicem excedit: illa autem minor, cujus antecedentis æqvemultiplex, conſequentis æquemultiplicem non excedit: hoc eſt, prima magnitudo ad ſecundam majorem habebit rationem, qvàm tertia ad qvartam. Sint in figura XXI. qvatuor magnitudines AB, AC, AP, AE. qvarum prima & tertia qvintuplicatæ dent AF & AQ. ſecunda verò & qvarta duplicatæ dent AH, AI: dico, qvoniam AF, multiplex primæ ſuperat AH multiplicem ſecundæ, AQ autem multiplex tertiæ, non ſuperat AI multiplicem quartæ; qvod ratio AB ad AC major ſit qvam AP ad AE. Quod enim ratio AB ad AC diverſa ſit ab ratione AP ad AE, adeoque, binæ hæ rationes inæqvales: præcedenti propoſitione demonſtratum eſt. Cum ergo rationes AB ad AC, & AP ad AE ſint inęqvales: ergo una neceſſariò minor erit; altera major. At illam rationem majorem eſſe, cujus antecedentis multiplum, majus eſt multiplo conſeqventis; illam autem minorem, cujus antecedentis multiplum; minus eſt multiplo conſeqventis ipſa recta ratio & ſana hominis mens dictitat. Quis enim ſanus contrarium ſtatuerit? aut qva veritate, vel in mediū illud adduci, vel ſapientibus viris probari poteſt? Imò verò, reipſa rationem AB ad AC, majorem eſſe, quam AP ad AE, inde liquet. Reductis enim ambabus rationibus ad idem conſequens AE: erit qvidem, ut AB ad AC, ſic AD ad AE. Ratio ergo

ergo AD ad AE, æqvalis rationi AB ad AC, eſt major ratione AP ad AE. Eſt enim antecedens AD majus antecedente AP. ideoque illa ratio major hac, per ea, qvæ ſunt demonſtrata capite. XIV. pag 311.

Quibus demonſtratis, ipſa definitio VII. libri V. Elementorum Euclidis veriſſima deprehenditur: falſumque omne illud quod Meibomius in contrarium movet: tum qvoque, ea omnia vera, qvæ Propoſitione VIII. & X. libri V. Elementorum ſunt propoſita, cum ex hac definitione, demonſtratio eorum juxta Euclidem procedat. Imò verò, ſi hæc definitio omitteretur: harum tamen Propoſitionum veritas facillima methodo demonſtraretur. Eſt enim VIII. Propoſitio, hæc. *Inæqvalium magnitudinum major ad eandem, majorem habet rationem, qvam minor: & eadem ad minorem, majorem habebit rationem, qvam ad minorem.* Nempè, tribus qvibuſcunque magnitudinibus datis, eadem, vel utraque datarum major eſt, vel minor, vel alterutri æqualis, vel denique una qvidem major, altera minor. Ut in figura XXII. Sint duæ datæ AB major, & CB minor, qvæ qvidem conferantur cum alia, nempe, vel AK, ita ut AK utraque data major ſit, vel AF, qvæ utraque data, minor ſit, vel AI aut AG, qvarum illa ipſi AB, hæc, ipſi CD eſt æqvalis, vel denique AH, quæ neutri datarum ęqvalis eſt, ſed minor qvidem qvàm AB, major autem qvàm CD. In omnibus ergo caſibus, ratio majoris ad eandem major eſt; qvam minoris ad eandem: cum retento eodem

conseqvente, antecedens illius rationis sit majus. Datæ enim rationes, qvæ invicem comparantur, sunt, AB ad EK, & CD ad EK: AB ad EI, & CD ad EI: AB ad EH, & CD ad EH: AB ad EG, & CD ad EG; denique AB ad EF, & CD ad EF. At in omnibus hisce rationibus semper priorum rationum antecedentia sunt majora antecedentibus posteriorum: cum illic antecedens sit major magnitudo, heic minor; conseqvens autem idem. Rationes ergo majoris magnitudinis ad eandem majores sunt, qvam rationes minoris magnitudinis ad eandem: qvoniam illic antecedens majus est; hic minus: juxta demonstrata capitis XIV. pag. 311.

At verò ex iisdem principiis constat, rationem ejusdem ad minorem magnitudinem majorem esse ratione ejusdem ad majorem magnitudinem: hoc est, in fig. XXII. rationem EK ad CD majorem esse, qvam EK ad AB, & sic EI ad CD majorem rationem habere, qvam EI ad AB: eodemque modo EH, vel EG, vel EF majorem habere rationem ad CD qvam ad AB. Si enim eodem antecedente retento, conseqvens augeatur: ipsa ratio imminuitur: juxta ea qvæ demonstrata sunt capite XIV. pag. 310. Unde cum in omnibus hisce rationibus idem sit antecedens, unum autem conseqvens majus, alterum minus: erit etiam illa ratio major, cujus consequens minus; illa vero minor, cujus conseqvens majus: adeoqve, ratio ejusdem ad minorem magnitudinem, major, qvam ejusdem ad

majo-

majorem magnitudinem. Unde tota Propositio VIII. certissime ac brevissime demonstratur.

Sed & decima propositio hujus libri ex hoc eodem principio demonstratur. Verba Euclidis sunt. Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων, τὸ τὸν μείζονα λόγον ἔχον, ἐκεῖνο μεῖζον ἐστὶ, πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττον ἐστίν. *Qvæ ad idem rationem habent; eorum majus qvidem illud est qvod majorem habet rationem : ad qvod autem idem majorem habet rationem, illud minus est.* Nempe, cum duæ magnitudines antecedentes idem habeant conseqvens; unum autem antecedens, majorem ad idem habeat rationem, qvam alterum: seqvitur, hoc antecedens majus esse. Etenim demonstratum antea est; majorem illa rationem habere, qvorum antecedentia cum eodem conseqvente comparata sunt majora: minorem vero, qvorum antecedentia minora. Vide capite XII. & XIV. Hæc ergo tam certa sunt, ac solem meridie lucere, aut nos homines esse. Unde falsum ac vanum omne illud qvod à Meibomio in contrarium adfertur. Videndum tamen, qvibus argumenais hæc oppugnet Meibomius, & an illa sapiente viro, aut veritatis amante digna?

CAP. XVI.

Ipsum ergo Meibomium nunc differentem audiamus libro suo de Proportionibus pag. 126. *Falsa igitur est octava Propositio libri qvinti Elementorum Euclidis & de-*

& decima, qvas pag. 32. & 36. retuli; & multæ aliæ, quæ ab his pendent. Falſa ergo eſt, uti poſtea amplius oſtendam libri qvinti definitio ſeptima, qvam pagina 30. & 4. retuli, quâ tanqvam baſi octava illa Propoſitio nititur. Multæ autem Propoſitiones veterum qvamvis falſæ non ſint, malè tamen ex his elementaribus demonſtratæ probantur. Male enim Euclides hac octava quinti uſus demonſtrauit ejuſdem libri Propoſitiones XIV. XX. XXI. Male quoque divinus Archimedes ex eadem demonſtravit ſecundam propoſitionem libri primi de Sphæra & Cylindro, qvam pagina 37. adduxi, ad qvem Eutocius commentando multas erroneas Propoſitiones, ex octava quinti deductas, protulit; qvas ante ipſum Pappus produxerat Mathematicorum Collectaneorum lib. VII. ex quo deſumptas, libri qvinti Elementorum fini, Juniores illa adtexuerunt. Ex illa quoque octava qvinti, propullulavit inſignis illa paralogiſmorum ſeries, in ſecunda demonſtratione VIII. Propoſitionis libr. II. de Sphæra & Cylindro qvæ à paginæ 48. verſu 23. his verbis incipit, δεικτέον οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ ΓΘ. *Monſtrandum igitur qvadratum à CH in HF minus eſſe rectangulo à BHC in HG. qvod idem eſt ac monſtrare quadratum à CH ad rectangulum, à BHC minorem rationem habere, qvam rectam GH ad HF. Nempe* 16. *ad* 24. *minorem habere rationem qvam habeat* $10\frac{1}{2}$ *ad* $15\frac{1}{2}$, *vel* 21 *ad* 31. *cum contra ſtatuendum ſit* 16. *ad* 24. *majorem habere rationem, qvam habeat* 21. *ad* 31. *Qvoniam enim eſt, ut* 16. *ad* 24, *ita* 21. *ad* $31\frac{1}{2}$, *ma:or eſt diſtantia inter*

21. & $31\frac{1}{2}$, *hoc est* 16. & 24, *qvàm inter* 21. & 31. *Nulla autem ex omni antiqvitate Mathematica illustrior Propositio proferri potest, qvam hæc sit octava Archimedis; in qva toties dicatur, qvæ ratio major sit, quæ minor; qvæ alterius dupla, qvæ sesqvialtera, in quo cum Theone juniores omnes & in primis Gregorius à Sáct. Vincentio tam amplè errarunt. Ideoque Eutocii commentarium, qvo fusissimè hæc Propositio & Euclidea doctrina, id est, libri qvinti Propositiones VIII. & X. enarrantur, totum proferendum putavi: ut, qvid veteres, hic docuerint, clarè omnibus constaret. Ita autem hæc cohærent, ut omnes Juniorum errores, nisi perspectis veterum erroribus solide dijudicari neqveant. Qvare, inqviebat Euthymius, cum is præcipuus hujus narrationis mihi scopus sit, ut, totam antiqvitatem, ignoratæ in qvibusdam Elementis Geometriæ convincam; deinde autem, Juniorum pravas explicationes & monstrosas hallucinationes demonstrem; antiqvis hunc honorem habebo, ut primi, demonstrationum viribus adacti, veritati, omnium rerum antiquissimæ, victoriam concedere cogantur. Agite ergo, ò præclari Mathematici, & omnes ingenii nervos contendite, ut & acutè omnia quæ porro relaturus sum inspiciatis, & alacriter vestra rationibus adductis defendatis. Falsam dixi qvinti libri Propositionem octauam. Quod si illa quæ in principiis, paulo ante exposui, bene vobis perpensa essent, falsitatis quoque causas perspectas haberetis. Duobus autem modis illius falsitatem ostendam. Primo falsa Euclidis principia de-*

monſtrando : Altero , vera Euthymii principia confirmando. Ita autem & contra Euclidem porro argumentatur & ſua probare conatur. *Tres autem hujus Propoſitionis caſus eſſe poſſunt. Vel enim tertia D*: (nempe adhibeatur diagramma Euclideum ad hanc Propoſitionem à Commandino allatum) *utrauis reliquarum* ${}^{A}_{B}$, *C minor eſt; vel major: vel majore* ${}^{A}_{B}$, *minor; minore autem C, major. Primo caſu, primum hujus Propoſitionis membrum, qvod pagina* 32. *relatum eſt his verbis*; Inæqvalium magnitudinum major ad eandem majorem rationem habet, qvam minor *Euthymius verum pronunciat: falſum autem membrum ſecundum, reuertendo aduerſam priori ſententiam proferens; quod ibidem his verbis conceptum attulimus*; & eadem ad minorem, majorem rationem habet, quam ad majorem. *Atque hujus primi caſus illud exemplum ponemus, quod Græci codices editus & manuſcripti adferunt: quod & Commandinus retinuit, Græci Codicis religioſus interpres; quem ſine cauſa hic deſeruit Clauius, dum tertiam D, ſecunda C poſuit majorem, propoſitionum XIV. XX. XXI. ejuſdem libri demonſtrationes, ut puto, ſecutus. Verum igitur eſt primum membrum,* ${}^{A}_{B}$ *ad D, ſeu* 7 *ad* 4. *majorem rationem habere, quam C ad D, ſeu* 5 *ad* 4: *at falſum membrum ſecundum, nempe D ad C, ſeu* 4 *ad* 5, *majorem rationem habere, quam D ad* ${}^{A}_{B}$, *ſeu* 4 *ad* 7. *Secundo caſu, primum membrum falſum eſt; verum autem ſecundum. Falſum enim eſt* 4 *ad* 6, *majorem ratio-*

rationem habere , qvam 3 ad 6. sed verum 6 ad 3, majorem habere rationem , qvam 6 ad 4. Tertiò casu falsum est utrumque membrum , quippe & hoc falsum est 4 ad 3 , majorem habere rationem, quam 2 ad 3 ; & istud 3 ad 2, majorem habere rationem, quam 3 ad 4. quod diuersi generis rationes inter se comparari nequeant. Quarè ex tribus hujus Propositionis casibus, unus verus est, reliqui duo falsi, ut statim demonstrabimus. Hæc ipsius Marci Meibomii verba sunt, in quibus præter stolidam quandam vanitatem atque arrogantiam , insignis quoque se monstrat falsum dicendi libido. Eqvidem capite *XI.* hujus libri accuratè & plenè demonstravimus, qvàm turpiter Meibomius Lectori imponat, dum Theoni aliisque juniorum errorem affingit, qvem non commisêre : quam falsò hunc ipsum Theonem & Eutocium accuset, cum & is, & cœteri post ipsum Mathematici, optime ea omnia sciverint, qvæ Meibomius pro suis oraculis venditat pagina 68. Unde hæc tam cruda rursum Lectori apponere opus non erat. Eqvidem, in iis quæ antea attigimus , ita se gessit Meibomius, ut fraus non ab omnibus tam facile animadverteretur. Quotusquisque enim est, qui Theonem veteréve legit. In his autem , quæ contra Euclidem movet, ipsa veritatis principia singulis, omnibusque hominibus innata, convellit; ut multo qvidē helleboro ipsi opus sit, ad tam crassos humores cerebro pellendos , qvibus occupata mens, id vel ignorat, vel respuit, quod nemo sanus verum esse non

pervidet: nemo, niſi mente motus, pro falſo unquam habuerit. Falſam dicit octavam & decimam Propoſitionem V. Elementorum Euclidis: falſam VII. definitionem ejuſdem libri: quas omnes veras eſſe, & nunc dicimus, & antea clariſſimè demonſtravimus. Unde nugæ ſunt, quæ de erroribus & falſis explicationibus Veterum pariter ac recentiorum hac in parte ſomniat Meibomius. Quæ enim hiſce fundamentis nituntur, atque hinc ſolide demonſtrantur, certiſſima ſunt; cum ipſa fundamenta ſint optima ac certiſſima. Illi verò, qvi exiſtimant nos Meibomio nihil contrarium dicere, advertant huc animum. Is enim falſam octavam & decimam Propoſitiones libri qvinti Elementorum dicit: ego utramque veram eſſe demonſtro. Is rationem 16 ad 24, majorem eſſe ait ratione 21 ad 31. ego minorem dico. Is falſum eſſe ait, *rationem 4 ad 6, minorem eſſe quam 3 ad 6.* ego idipſum verum eſſe affirmo. Quid magis contrarium, qvam verum & falſum? affirmatio & negatio? majus & minus?

Sed conferamus invicem Euclidis, hoc eſt, noſtram aſſertionem, cum hac Meibomii: & primò quidem, in tertio Meibomii caſu, ubi AB, ſeu unam datarum magnitudinum, tertia ſeu D majorem ponit, C autem ſeu ſecundam, eadem tertiâ minorem. Sitque in figura num. *XXII.* hujus libri, AB Meibomii, ſeu prima inæqualium, etiam noſtra AB. C. autem Meibomii ſeu ſecunda inæqualium, ſit noſtra CD, deniq; tertia

tertia seu eadem qvæ est Meibomii & Euclidis D, sit nostra EH. Dicit autem Euclides rationem AB ad EH, majorem esse, qvam CD ad EH. Tum qvoq;, EH ad CD, majorem habere rationem, qvam ad AB. Utrumque falsum esse ait Meibomius: nos autem verissimum esse antea certissime demonstravimus. Per ea enim, qvæ capite XIV. & XII. fuere proposita, manifestum fecimus: reductis binis rationibus, ad idem consequens, tùm illam majorem esse, cujus antecedens majus; illam vero minorem, cujus antecedens minus. Retento autem eodem antecedente, illam rationem majorem, cujus consequens minus; illam vero minorem, cujus consequens majus. Ratio ergo AB ad EH, major erit, quam CD ad EH: cum antecedens AB, majus sit, antecedente CD. & rursus, ratio EH ad CD, major erit, quàm ad AB; cum illud consequens minus sit; hoc majus. Videndum verò, quid contra manifestam hanc veritatem adferat Meibomius? Dicit *utrumque membrum hoc casu falsum esse, quod diversi generis rationes excessiva & defectiva inter se comparari nequeant.* At vero unde probat Meibomius hasce rationes comparari invicem non posse? Credítne nos adeo fungos esse, ut fidem habeamus contra claras ac manifestas demonstrationes sine probatione qvicqvam proponenti? At si in Geometricis disputare velit, saltem principia ipsius cognita habeat. Demonstravimus autem in prioribus, nihil in Geometria supponi debere: nisi quod

communi omnium hominum notione verum deprehenditur. Sicut illa Geometrarum Axiomata verè talia ſunt. *Qvæ eidem æqualia etiam inter ſe ſunt æqualia. Et totum majus ſua parte.* At vero taléne hoc eſt principium Meibomii. *Rationes exceſſivæ & defectiuæ comparari invicem nequeunt.* Quis unquam mortalium hoc conceſſerit, præter Meibomium? Contrarium docent omnes Geometræ, omnes Mathematici. Imo reipſâ comparant invicem rationes exceſſus & defectus. At ſi impoſſibile eſſet rationes exceſſûs & defectûs invicem comparare: neque id feciſſent Geometræ. Quod enim impoſſibile eſt, aut fieri nequit, id nemo mortaliũ facere poteſt. Sane, id quivis ratione præditus perſpicit: quod ea quæ fieri nequeũt; ab nemine fiât. At revera comparãtur invic ẽrationes exceſsûs & defectûs. Ergo comparatio taliũ rationum fieri poteſt, neque eſt impoſſibilis. Sed video facilè, quid Meibomium in hunc errorem præcipitaverit. Fando forte audiuerat, eſſe qvædam apud Geometras, quæ comparari invicem nequeunt. Crediderim quoque ex verbis hiſce Euclidis in Definitionibus rationum, λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν κλ. *Ratio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis* &c. erroris ſui fundamentum traxiſſe. Verum qvidem eſt, nullam rationem poſſe ſumi inter aliquid & nihil. Τοῦ γὰρ ὄντος πρὸς τὸ οὐδὲν οὐδεὶς λόγος ἐστί. Ratio enim rei alicujus ſeu (entis) ad nihil nulla eſt. Unde hac quidem in

parte

parte verum ait Meibomius pag. 146. (quamvis nihil novi adferat) diuitum bona, cum pauperum bonis, quæ nulla ſunt, conferri non poſſe. Sed unde probat Meibomius, rationes exceſſivas (ut ille loqvitur) aliqvid eſſe, defectiuas vero nihil? Sanè, rationem æqualitatis vocat rationem nihili. An vero rationes defectûs etiam ſint rationes nihili? id autem ignoro. Quod ſi has quoque tales fecerit, jam non video qvid inter rationes æqualitatis & defectûs diſcriminis ſiet. Equidem inter jocoſeria narratum mihi aliquando fuit, vaccam ſine cerebro vixiſſe per ſpatium aliquod ſatis longum, craniúmque apertum nibil cerebri monſtraſſe, ſed vias quidem ductuſque omnes, tum quoq; pulpam ipſam in lapidem mutatam. Quod ego Meibomio evenîſſe nollem. Tum enim facile fieri poſſet, ut cui nihil in capite cerebri eſſet; illi quoque ipſa ratio adeo defectiva foret, ut planè inſtar nihili fieret. Sed meliora ſperamus optamuſque. Tantum id ajo, male argumentari Meibomium, pag. 146. qui principium ſuum, nempe *rationes exceſſûs & defectûs non poſſe inuicem comparari* hinc probat; quod bona diuitis & egentis, ſeu qui nil poſſidet, nequeant conferri. Verum enim eſt, ſi quidem Titius nihil plane poſſideat; tum bona Lucii, cum illius bonis, comparari non poſſe: cum nulla inſtitui poſſit collatio, inter aliquid & nihil. Hoc autem contra comparationem rationum exceſſûs & defectûs nil concludit: cum, rationes defectus verè ſint aliquid: ideoque, collatio iſta ſit rei ali-

alicujus ad aliam. Ut autem curioſo Lectori, gratam, hac in parte, operam præſtemus: paulo accuratius de iis diſputabimus, quæ comparari in Geometricis invicem nequeunt. Inter ea ergo, ratio in Geometricis ſumi non poteſt: quæ, communem aliquam menſuram non habent. Cum enim ratio proprie atq; accurate loquendo, ſit mutua duarum magnitudinum relatio ſecundum quantitatem: hoc eſt, ratio ſit illa habitudo, qvam una magnitudo habet ad aliam; nempe, quod vel æqualis alteri ſit, vel dupla, vel tripla, vel centupla, & ſic porrò in infinitum: hæc autem relatio ſeu habitudo, non cognoſcatur ſine communi menſura: ergo, ubi nulla communis menſura, ibi neque ratio. Ubi enim nulla fuerit communis menſura: ibi neque dici poteſt, an unum alterius duplum ſit, an triplum, an dimidium; unde nec ipſa ratio haberi ſciríve poteſt. Equidem, in magnitudinibus ineffabilibus dicere nequeo, unam alterius duplam triplámve eſſe: certam tamen harum linearum menſuram habeo, ita ut in qvibuſcunque datis lineis eandem menſuram exprimere poſſim. Inter lineam vero & quadratum quodcunque, in Geometricis nulla ratio datur: quia nulla horum perfecta communis menſura. Longitudo quidem totam lineam menſurat, ſed quadratum cubúmve non niſi ſecundum unam menſuram. Cœteræ autem menſuræ in latum nempe & profundum, in linea non ſunt. Ideoque, cum menſurari eo modo linea nequeat; utique nec dici poteſt, quota pars

pars, aut quotupla qvadrati cubíve ſit. Hanc ob cauſam, neque ratio inter finitum & infinitum datur: (Infinitũ enim illud vocatur, cujus nulla eſt menſura) ſicut neq; inter magnitudines, pondera aut numeros. Neque enim magnitudinis alicujus & numeri, communis menſura datur. In magnitudine enim quacunque, qvicunque numerus ſumitur: cum omnis magnitudo in infinitum dividatur: adeoque, & unum, & mille, & centum mille numeri illic concipiantur. Eodem modo in eodem pondere diverſi numeri diverſæque magnitudines conſiderantur. Si enim cubus ferreus cum cubo plumbeo comparetur: ſi magnitudo eadem fuerit, pondus diverſum erit: & ſi pondus utrinque idem, magnitudo erit diverſa. Cum ergo nullam communem menſuram habeant magnitudines, pondera & numeri; neque comparari invicem poſſunt ſecundum magnitudinem: adeoque nec inter illas ratio dari. Euclides, aliis qvidem verbis explicuit naturam eorum qvæ comparari invicem poſſunt. Definitione IV. libri qvinti. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. *Rationem invicem magnitudines habere dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem poſſunt excedere.* Unde, rationem invicem non habebunt, qvæ multiplicatæ, ſe invicem excedere nequeunt. Atque ita qvidem, infinitum ad finitum, nullam habebit rationem: qvandoqvidem, quodcunque finitum, qvomo-

docunque multiplicetur, ſemper finitam habeat magnitudinem, ideoque infinitum excedere nequeat. Neſcio tamen, an hæc definitio ſatis ſit accurata? Inter lineam enim & cubum ratio non datur. Et tamen haud pro certo dixerim, ſaltem, non tam clarum & manifeſtum id eſſe arbitror, ut ſupponi debeat: lineam, qvocunque modo multiplicetur, qvadratum tamen, cubúmve excedere non poſſe. Certum qvidem eſt exceſſum lineæ ultra qvadratum aut cubum non dari. Verùm id ideo contingit, qvod nulla ſit menſura, qva exceſſus iſte menſuretur. Omnia ergo, quæ communem menſuram nullam habent, ſunt planè irrationalia, hoc eſt, nullam ad invicem rationem habent. Scio aliter vocem *irrationalis* Geometris qvibuſdam uſurpari, nempe, pro eo, qvod nos ineffabilem rationem dicimus: ſed hæc propria atque accurata vocis ſignificatio eſt. Quæ ergo communi menſura carent, ea neque comparantur invicem ſecundum qvantitatem. Cœtera autem poſſunt. Sic linea curva & recta comparantur invicem. Linea enim parabolica, hoc eſt, curva, æqvatur alteri rectæ. Sic linea cum lineis, pondera cum ponderibus, numeri cum numeris comparantur. Id autem, qvod de menſura hucuſque diximus, accuratius adhuc nobis erit explicandum. Omne ergo, qvod ſecundum qvantitatem cum alio comparatur, talem omnino ad aliud σχέσιν habet; ut vel alteri ſit æqvale, vel majus, vel minus. Omnis enim σχέσις, ſecundum qvantitatem,

tem, in hiſce tribus conſiſtit; nempe, ut antecedens terminus conſequenti, vel æqvalis ſit, vel major, vel minor. Atqvi hoc ſciri neqvit, niſi per communem menſuram, qvæ qvidam indicat, an ambo termini, æqvales ſint, an unus major, alter minor. Quæ ergo hac communi menſura carent, in illis neque ſciri poteſt, an æqvalia invicem ſint? an majora, minoráve? adeoque, nec ſciri, qvam σχέσιν invicem habeant: unde nec ratio inter talia datur. Si autem communem menſuram habuerint, facilè cognoſcitur qvis datorum terminorum major ſit, qvis minor? niſi ambo fuerint æquales. At ſi cognitum eſt terminos, vel æquales eſſe, vel majorem unum, alterum minorem, idque certo modo, ut unus alterius, vel duplus ſit, vel triplus, vel ſubduplus, vel denique, ut linea ad lineam; qvæ omnia menſura cognoſcuntur: jam qvoque ratio ipſa datur. cum ratio nihil aliud ſit, qvam hæc ipſa σχέσις qvam unum qvantum habet ad aliud juxta datam qvantitatem. At vero omnes rationes communem habent menſuram, nempe antecedentium terminorum. Id enim qvod qvantitatem exprimit ac definit, menſurat rem. Sed antecedens exprimit & definit qvantitatem rationum. Si enim antecedens duplum fuerit conſeqventis, ratio eſt dupla; ſi, antecedens triplum, ratio tripla: ſi antecedens ſubduplum, ratio ſubdupla: atque ſic in infinitum Cum ergo in omnibus rationibus, tam exceſsûs qvam defectûs antecedens exprimat ac definiat qvantitatem rationum,

ergo communis rationum menſura datur, adeoque invicem poſſunt comparari.

CAP. XVII.

Sed aliud fortè argumentum opponet Meibomius: nempe, cum ipſe Euclides fateatur, eas ſolas magnitudines mutuam rationem habere, atque invicem comparari poſſe, qvæ, multiplicatæ ſe invicem excedunt, ergo & illæ ſolum rationes comparari invicem debent, qvæ multiplicatæ ſe invicem poſſunt excedere. At vero rationes defectûs, ſi in infinitum in ſe multiplicentur, nunqvam tamen excedent rationem qvamcunque exceſsûs datam. Si enim rationem quamcunque defectûs duplicaverim, triplicaverim, deniq; millies, aut centies millies in ſe multiplicaverim: ſemper ratio facta, erit ratio defectûs, adeoque, minor qvacunque data ratione exceſsûs. Cum enim demonſtratum antea ſit, capite XII. & XIIII. rationes exceſsûs multiplicari, qvando media proportionalis multiplicationi reſpondens, inter extrema ſeu terminos inveſtigatur: ratioque antecedentis ad mediam, eſt facta ex multiplicatione: quæ quidem priore major eſt, & tamen ſemper ratio defectûs: ideo ratio defectûs non poteſt excedere rationem datam exceſsûs.

Verùm ſi hoc omnino ita ſe haberet, certumque adeo foret, non poſſe rationes defectûs excedere rationes exceſsûs, neque ullo modo invicem comparari: non ideo qvicquam, vel contra Euclidem, vel contra

contra Veteres Geometras proficeret Meibomius. Etenim, vel verum eſt id quod proponitur: rationes defectûs cum rationibus exceſsûs comparari non poſſe; quod illæ multiplicatæ, has excedere nequeāt: vel falſū eſt. Si falſum eſt; omnis controverſia eſt finita, ſoluſq; Meibomius erroris convincitur. Si verum eſt: utiq; id non ignorauit Euclides, qui ea tantum comparari invicem poſſe tradidit, quæ ſe invicem multiplicata excedunt. Sanè, nec in VII. definitione, neque in VIII. vel X. Propoſitione V. libri quicquam tradidit, ex quo demonſtretur Euclidem, rationes exceſsûs & defectûs invicem comparâſſe. Poſito enim, ex mente Meibomii, rationes exceſsûs & defectûs invicem comparari non poſſe, qvoniam iſtæ multiplicatæ has non excedant; cum ultimum hoc, ſit principium Euclideum: dicendum omninò, ſi prius verum eſt, neque illud ignoratum fuiſſe Euclidi: cum nihil diſertis verbis contra hoc dogma ſcripſerit. Ubi enim Definitione VII. rationes inæqvales, nempe majores & minores definit, ita loqvitur, ut verba qvidem ipſius facile explicari poſſint, de rationibus ejuſdem ſpeciei: ſi qvidem ſupponatur, rationes exceſsûs cum rationibus defectûs non comparari. In demonſtratione qvoq; Propoſitionis VIII. verba illa ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ. *alia vero magnitudo quæcunque* Δ. ita explicari poſſunt; ut eadem magnitudo; nempe Δ, vel major ſit, utraque data, vel minor. Si enim Euclides exiſtimaſſet rationes exceſsûs cum rationibus defectus omnino non

comparari; neque necessarium fuisset de eo heic monere, quod eadem seu D. media inter utramque datam sumi non posset; quandoqvidem, id ex alio principio cognitum esset; eo nempè, rationes excessus & defectus non posse invicem comparari; qvod se invicem excedere neqveant. Atque ita qvidem constat, si verum omninò foret id qvod Meibomius supponit: nempè, non posse rationes excessûs & defectûs invicem comparari, non tamen ideo ullum Euclidis principium à Meibomio eversum esse: cum is nusquam rationes excessûs & defectûs invicem disertis verbis comparet.

Sed nec argumentum hoc Meibomii ullo modo verum est. Definitio enim Euclidea quæ de iis agit, quæ rationem invicem habent, tantum de magnitudinibus loqvitur: & si ipsis quoque rationibus necessario applicari deberet, nihil tamen contra hoc certum principium concluderet: qvandoquidem, rationes si invicem addantur, tandem, qvamcunque aliam rationem excedant: & ratio qvæcunque defectûs possit per aliam quandam rationem, nempe excessûs, ita multiplicari; ut datam rationem excessûs omninò excedat. Atque in additione res clara est. Detur enim qvæcunque ratio defectûs, nempè 1 ad 2, alia autem excessûs 3 ad 2. Si prior ratio qvater addatur invicem, erit ratio facta 4 ad 2, adeoque major, quam 3 ad 2. Cujus rei demonstratio ex capite X. pag. 231. & seq. petatur. Verùm, in multiplicatione, etiam idipsum

idipſum liquet. Datis enim binis hiſce rationibus, 1 ad 2, & 3 ad 2. ſi priorem multiplicaverim per rationem 7 ad 2: prodit ratio facta 7 ad 4, qvæ major eſt ratione 3 ad 2, ſeu 6 ad 4.

Id verò, qvod principio dixi, non poſſe rationes defectûs in ſe multiplicatas ullam rationem exceſsûs ſuperare: nihil impedit, quo minus rationes ideo invicem comparari queant. Etenim antea demonſtravimus, ea tantum invicem comparari ſecundum magnitudinem non poſſe, quæ communi menſura carent. Rationum autem menſura ex antecedentiũ terminorum qvantitate dependet: qvæ facillime cognoſcitua, ubi ambæ rationes ad idem conſeqvens fuerint reductæ. Tum enim facile perſpicitur, quotuplus, aut qvota pars conſeqventis antecedens terminus ſit, adeoque communis menſura rationum datur. Sint enim in figura XIX. rationes ομ ad ζν, & αγ ad φε invicem comparandæ: reducantur ambæ ad idem conſequens φε, ſitque, ut ομ ad ζν, ſic ζν ad φε. Cum ergo ratio ζν ad φε, hoc eſt, σμ ad ζν, comparatur cum ratione αγ ad φε: facile perſpicitur, antecedens αγ partem eſſe conſeqventis φε: antecedens vero ζν, totum aliquod eſſe, cujus pars ſit φε: adeoque, illic eſſe rationem partis ad totum: heic autem, totius ad partem. Undè, communis menſura harum rationum datur. Ipſæ enim rationes, nullam, propriè loqvendo, qvantitatem habent. Sunt enim χέσεις ſeu relationes qvantitatum, qvoad qvantitatem, Quantitas autem ipſarum

ſarum ex qvantitate antecedentium terminorum ſimpliciter dependet. Si enim antecedens terminus, conſequentis duplus fuerit: ratio eſt dupla; ſi ttiplus, tripla: & ſic in infinitum. Nihil ergo obſtat, qvò minus, rationes exceſsûs & defectûs invicem conferantur. Quod enim definitionem illam Euclidis attinet, *ea nempe comparari invicem debere; qvæ ejuſdem ſunt generis*, nullo modo nobis adverſatur. Rationes enim exceſsûs & defectûs, non genere differunt, ſed ſpecie. Genus autem commune habent, nempe rationes. Eodem enim modo, quo animal genus hominis & bruti, dividitur in rationale & irrationale; qvæ quidem diviſio, diverſas ejuſdem generis ſpecies dat: ita etiam, ratio dividitur in exceſsûs, æqualitatis & defectûs, ut diverſas ſpecies ejuſdem generis. Atque hæ veritates tam claræ ſunt: ut ipſe quidem Meibomius, qvamvis contrarium verbis doceat, re tamen & opere eas ipſas probet. Paſſim enim in libro ſuo, ac ſigillatim pag. 106. & 104. ait rationem duplam æqualem eſſe ſubduplæ, ſeu dimidiæ; & ſeſqvialteram, ſubſeſquialteræ: quod, qvamvis ineptum plane ac falſum ſit; id tamen, quod proponimus, clare indicat; ipſum nempe Meibomium, rationes exceſsûs & defectûs invicem comparare ſecundum qvantitatem. Quicquid enim æquale alteri dicitur, id cum illo neceſſariò comparatur ſecundum qvantitatem. Æqvalia enim ſunt, quorum quantitas eſt æqualis. At ſi Meibomius rationem duplam ſeu exceſsûs, æqvalem

esse ait subduplæ, seu defectûs ; & sesqvialteram etjam excessûs , subsesqvialteræ, seu rationi defectûs: ergo rationes excessûs & defectûs secundum qvantitatem invicem comparat. Adeoq; possunt invicem comparari. Unde nullus hic lapsus, aut error, vel Euclidis, vel aliorum Geometrarum : sed solius Meibomii, qvi ea fieri posse negat, quæ omnes Geometræ faciunt, imò qvę ipsemet facit Meibomius; qvamvis hic falsam, illi veram & rectæ rationi conformem comparationem tradant : de quo plura sequenti capite. Hoc enim clare demonstravimus, rationes excessûs cum rationibus defectûs verè conferri posse, ideoque male agere Meibomium, qui Euclidem Geometrasque hanc ob rem erroris insimulat.

CAP. XVIII.

Duos vero reliqvos casus Meibomii qvod attinet, primum nempe & secundum, in iis qvidem hoc unicum observandum est, qvod Euclides in comparatione rationum defectûs, eas minores ponat, qvarum antecedentia sunt minora: eas vero majores, qvarum antecedentia, reductis rationibus ad idem consequens, majora fuerint. Quod etiam verum esse, antea capite XII. & XIV. hujus libri, accurate demonstravimus. Neque aliter communis omnium hominum intellectus, ipsumque veritatis lumen in natura residuum dijudicare potest. Si enim res mihi cum hoste quodam esset, qvi exercitum sexaginta millium arma-

torum contra me duceret: ego autem geminũ haberem exercitum, unum XL millium armatorum, alterum XX. certum eſt, ſi duos exercitus conjungerem: tum, qvoad numerum bellatorum, rationem utrinque eſſe æqvalitatis. Iuncti enim ambo mei exercitus darent LX. M armatorum, qui numerus alterius numero æqvalis eſt. Si vero propter alias cauſas, ambo exercitus colligere, locóve movere nequirem: mihi vero neceſſarium foret, uno exercitu hoſti obviam ire, maximeque rebus meis conducere judicarem, ſi illum mecum exercitum ducerem, qvi majorem ad hoſtis exercitum rationem haberet: crediderim, nullum inter omnes duces, omnéſve milites futurum, qui non eum exercitum, majorem ad hoſtem rationem habere diceret, in qvo quadraginta millia armatorum ſunt; quam eum, in quo viginti millia: adeoque, re & opere teſtarentur, rationem quadraginta ad ſexaginta, majorem eſſe, quam viginti ad ſexaginta.

Eodem modo, ſi Princeps decretum aliquod in qvibuſdã urbibus quã citiſſime propoſitum vellet, eamq; ob rem, quinq; vel ſex tabellarios emitteret, qui mandata ad quatuor vel quinque urbes præcipuas eodem intervallo à metropoli vel regia ſede remotas deferrent; unáque in pagis, viciſque; per quas ſingulorum iter inſtituendum erat, eadem indicarent. Ad excitandum vero ſtudium ac diligentiam curſorum, præmia ſingulis proponeret, pro ratione itineris qvovis die facti: dico majora præmia eum habiturum, qui majo-

majora ſpatia confecerit ; adeoque rationem itineris ipſius majorem eſſe. Sit enim in fig. XXIII. hujus libri A ſedes regia. B. C. D. E. F. urbes primariæ regni, eodem interuallo ab A diſſitæ . decurrant autem plures tabellarii, unus quidem verſus B , alter verſus C, tertius verſus D, quartus verſus E, & qvintus verſus F. Primo autem die, perveniat curſor AB in G: curſor vero AC, in H: curſor AD, in I: & curſor AE, in K: & denique curſor AF, in L. dico, eum qui eſt in G, majus præmium accepturum, quam eum, qui eſt in H, aut in I, aut in K, minus vero quam eum, qui eſt in L. eo quod plus itineris confecerit, quam vel H, vel I, vel K, minus vero quam L. Accipiunt autem præmia juxta rationem itinerum ſuorum ad totum. Eſt autem ratio itineris ejus, qui eſt in G, ut AG ad AB, ratio autem itineris in H, ut AH ad AC, & ratio itineris in I, ut AI ad AD. & ſic itineris in K, ut AK ad AE. denique ratio itineris in L, ut AL ad AF. Quoniam ergo majus præmium accipiat is, qui eſt in G, quam is qui eſt in H, aut I, aut K: minus verò quam is, qui eſt in L: ſinguli autem, pro ratione itineris ſui, quovis die peracti, præmia accipiunt; ergo, ratio AG ad AB, major erit quam AH, ad AC, vel AI ad AD, vel AK ad AE. Eadem vero ratio AG ad AB, minor erit qvam AL ad AF. Sunt vero AB AC, AD & AF æqualia. Reductis ergo omnibus rationibus ad eadem, ſeu æqualia conſequentia: ratio illa major eſſe deprehenditur, cujus antecedens ma-

jus eſt : illa autem minor , cujus antecedens minus: quod quidem antea ex claris certiſque Geometricis principiis cap. XII. & XIIII. fuit demonſtratum, unde Lector plura petat. Quid autem contra hæc Meibomius? Principium quidem tale ſupponit , quod non manifeſtè verum eſt , ſicut illa quæ in Geometricis ſupponuntur, & ex quibus ſua demonſtrauit Euclides, aliique poſt illum Mathematici : ſed quod manifeſtè falſum & ineptum eſt. Ponit enim pro principio, rationem duplam æqualem eſſe ſubduplæ ſeu dimidiæ, & ſeſquialteram ſubſeſquialteræ. Verba ejus pag. 104. *Itaque ratio* $\frac{1}{2}$, *æqualis eſt rationi* $\frac{2}{1}$ *ſubdupla duplæ*. At ſi æquales ſunt hæ rationes, dupla nempe & dimidia; dabunt proportionem Geometricam: eritque adeo, ſecundum Meibomium , ut 4 ad 8 , ſic 8 ad 4, vel 16 ad 8. Hoc enim ex ipſo Meibomio liquet. Hæc enim verba ipſius ſunt pag. 185. *Itaque omnium optimè proportionem Ariſtoteles finivit rationum æqvalitatem. Verba illius ex V. Ethicorum Nicomachiorum adponam.* Ἡ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγου καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις. *Proportio eſt rationum æqvalitas &c.* Dico autem, ſi hæc definitio analogiæ ſeu proportionis omnium optima eſt , ut ipſemet Meibomius ait: ergo convertitur. Omnis enim bona definitio debet converti ſimpliciter: ut omnis homo eſt animal rationale: & omne animal rationale eſt homo. Dicendum ergo eſt, omnis proportio Geometrica (de hac

enim verba facit & Aristoteles & Meibomius) est rationum æqualitas: & omnis rationum æqualitas est proportio Geometrica: quod & verum omninò est. At si ratio dupla & dimidia invicem æquantur: ergo illic est æqualitas rationum secundum Meibomium, adeoque proportio Geometrica. Hæ ergo rationes sunt æquales Meibomio. 2 ad 4, & 8 ad 4. tum quoq; 2 ad 4, & 16 ad 8. Ratio enim 16 ad 8, dupla, æqvatur rationi 4 ad 8 subduplæ secundum Meibomium. Est autem ratio 2 ad 4, æqualis rationi 4 ad 8; cum hæc vere sint proportionalia: quod ne Meibomius quidem negaverit. Qvæ vero eidem æqualia, etiam inter se sunt æqualia. Ratio ergo 2 ad 4, est æqualis rationi 16 ad 8. Unde hæc secundum Meibomium erunt proportionalia, ut 2 ad 4, sic 16 ad 8. Proportio enim secundum Meibomium est æqvalitas rationum; adeoq;, ubi æqvalitas rationum, illic proportio. At si Meibomio fides, æqvales sunt rationes 2. ad 4. & 16. ad 8. ergo etiam proportionales erunt. Idipsum, in qvadruplis & subqvadruplis rationibus verum erit, si vera dicit Meibomius, Qvoniam enim ratio dupla æqvatur subduplæ, tripla autem subtriplæ, & qvadrupla subqvadruplæ, atq; sic in infinitum: ergo ratio subdupla minor est subtriplâ, & hæc subqvadrupla; atq; sic in infinitum. Nempe unò absurdo dato seqvuntur infinita. Erunt ergo, ut 2 ad 8, sic 64 ad 16. juxta Meibomium. Equidem Marce Meibomi, si magno in ære alieno esses, crederem facile propriam

 ob

ob causam, hoc abs te insipidum dogma esse confictum, ut magnis creditoribus magnis nugis satisfaceres. Si enim quisquam centum millia æris pluribus creditoribus unive deberet; bona autem ipsius non nisi millia æris æquarent: tuâ quidem doctrinâ multum proficeret: cunctisque creditoribus facile satisfaceret. Cum enim ratio bonorum ipsius ad debitum, sit subcentupla; ratio autem debiti ad bona centupla: juxta te autem, ratio centupla & subcentupla æqualis: ergo, cum ratio bonorum ad debitum, quæ est subcentupla, æquetur rationi debiti ab bona, seu centuplæ: omnibus ergo creditoribus satisfactum est. In libris enim mercatorum, quando rationes crediti æquantur rationibus debiti: omnia salua sunt, fidesque arcæ integra. Omnibus ergo obæratis magnam hac in parte gratiam faceres: si tamen verborum Christi meminisse nollent. *Quodcunque vultis ut vobis faciant homines, id & facite iis. & qvod tibi non vis fieri, alteri ne feceris.* Sane Marce Meibomi, non mihi persuadere possum, hanc doctrinam tibiipsi placituram. Si enim quis tuę illius pulchræ sapientiæ cupidus, binis mensibus operam tibi navare vellet, atque pro illis octo tibi aureos polliceretur: postea vero pro cœteris omnibus mensibus proportionaliter. Transacto autem *XVI.* mensium spatio: quando tu nummos tuos rogares: is pœnitentia ductus, quod bonas horas tam malè locasset, tergiversari inciperet, teque tuis artibus peteret: crediderim facile, id gratum tibi non futurum,

si pro 64 aureis, solos tibi qvatuor numeraret. Neque tamen ulla te injuria afficeret: cum ex tuis principiis hanc sapientiam hausisset. Pollicitus enim est, se tibi proportionaliter pro cœteris mensibus daturum. At vero, juxta te, ubi æqualiras rationum; illic proportio. Sunt vero juxta te, æquales hæ rationes, 16 ad 64, & 16 ad 4. Ratio enim 16 ad 4 est qvadrupla. Ratio autem 16 ad 64 subquadrupla. At si ęquales hę rationes, ergo hic est æqualitas rationum, adeoque proportio. Dabit ergo tibi juxta tuam proportionem quatuor aureos, pro sexaginta quatuor aureis. Ego quidem, aliique omnes mortales calculum ita poneremus: si duo menses dant octo aureos, ergo 16. menses dabunt sexagintaqvatuor aureos. Nam ut duo ad octo, sic sedecim ad sexaginta qvatuor. Is autem tuæ sapientiæ consultus responderet, ut sedecim ad sexaginta qvatuor, sic sedecim ad quatuor. Sunt enim rationes hæ, æquales invicem, quadrupla nempe subquadruplæ: adeoque vere hæc sunt jnxta te proportionalia. Unde is, qui pro duobus mensibus octo aureos promiserat: proportionaliter, hoc est, juxta tuam proportionem, pro sedecim mensibus tantum qvatuor aureos daret. adeoq; tua tibi sapientia nocumento ac detrimento foret. Eqvidem non dubito, qvin pro egregia tua prudentia, aliqvod effugium qværas, ne tam claræ veritates cæcutientem te lumine suo enecent. Nam & exceptionem qvandam proponis. Dicis enim rationem duplam æqvalem esse sub-

duplæ

duplæ in suo genere. Sed existimás ne qvemqvam sapientum adeo simplicem fore, ut tuis sibi verbis imponi patiatur. Qvid est æqvale, Marce Meibomi? Id qvidem qvod eandem qvantitatem habet: seu, cui altera ejusdem generis quantitas ęqvalis datur. Si enim diversi generis qvantitas fuerit: non comparantur invicem. Ita ergo duę ulnę Selandicę ęqvales sunt qvatuor pedibus Rhinlandicis in suo genere, hoc est in magnitudine. Quoad numerum enim, ęqvales non sunt. Omnes ergo res quę ęqvales dicuntur: secundum idem genus quantitatis tales esse dicuntur. Quod ergo ais, rationes excessus & defectûs invicem esse ęqvales, duplam nempe subduplę, & triplam subtriplæ, in suo genere: nihil aliud dicis quàm eo modo esse ęqvales quo aliæ omnes res quę ęqvantur sibi, etiam sint ęquales: hoc est quatenus eandem vel ęqualem ejusdem generis quantitatem habent. At si hoc modo ęquales sunt: etiam proportionales juxta te erunt: omnesque illę absurdę conclusiones, quas antea proposui, juxta te erunt verissimæ. Qvod si alio in genere considerari hæc velis, qvàm juxta qvod comparantur: nihil quidem Euclidi contrarium dices, sed magno conatu magnas nugas ages. Si enim Sophistarum more progredi volueris facile doctrinam hanc tuã confirmabis. Qvatuor enim pedes æqvantur binis ulnis. At qvaternarius est duplus binarii: ergo duplum æqvatur dimidio. Hæc qvidem inter sophistica proponi possunt. Sed apud sapi-

ſapientes viros, ne audiri qvidem digna ſunt. Qvoniam enim duæ ulnæ qvatuor pedes faciunt, ergo magnitudo utrinq; eadem eſt: qvamvis, ob diverſitatem menſuræ, alio atq; alio numero exprimatur. Tum qvoq; Logici contra hanc argumentationem ſtatim dicent, qvatuor in ea terminos eſse. Major enim agit de magnitudinibus: minor, de numeris. Qvamvis ergo duæ res, aliqvando, non qvatuor tantum, ſed & mille & centum mille rebus ſint majores : non tamen ideo dimidium aut ſubmillecuplum, duplo aut millecuplo majus eſt. Dupla enim qvantitas eſt, qvæ aliam qvantitatem bis in ſe continet. At magnitudo qvatuor pedum magnitudinem duarum ulnarum ſemel tantum in ſe continet. Adeoq; ipſius dupla non eſt. Unde nec dupla ratio ullo modo probatur rationi dimidiæ eſse æqvalis. Poteſt enim fieri, ut duę res fiant ęqvales qvatuor rebus: ſicut duæ ulnę ęqvantur qvatuor pedibus. Neq; tamen ideo dimidium ęqvatur duplo.

CAP. XIX.

Sed ut vaniſsima hęc argumenta & exceptiones Meibomii cuivis ob oculos ponantur; & qui ratiocinari nouit, faciliori negocio omnia perſpiciat: hoc capite argumenta qvędā, Syllogiſmo incluſa, proponam.

Qvicqvid majus, minus aut æqvale dicitur, id ſimpliciter tale eſſe cenſetur, qvoad qvantitatem. Ratio major, minor, aut æqvalis alteri dicitur, tam Mei-

bomio qvam Euclidi. Ergo talis ſimpliciter eſſe cenſetur qvoad qvantitatem. Major propoſitio eſt clara. Nihil enim in Geometricis, majus, minus aut æqvale eſſe dicitur, niſi reſpectu quantitatis ipſius. Scio qvidem alicubi, in uſu vulgari, formulas qvaſdam dari, qvæ aliter explicari poſsunt. Sed Euclides, contra qvem diſputat Meibomius, propriè & accuratè loqvitur. Si ergo hunc falſi arguere velit Meibomius, etiam propriè & accuratè loqvatur: ut id falſum eſſe demonſtret, quod Euclides verum eſſe dicit. Minor propoſitio eſt utrinq; conceſsa. Non enim diſputat Meibomius, an rationes qvantitatem habeant: ſed poſito, qvantitatem eas habere; dicit, Euclidem in eo falſũ fuiſse, qvod eas minores dixerit, qvæ reverá ſunt majores. Si ergo ratio una altera minor eſt, & major: certe rationes qvantitatem habent ſecundum Meibomium: & qvatenus quantitatem habent, majores minorésve aut æquales dicuntur. Concluſio ergo clara eſt. Unde rurſum tale argumentum in medium adduco.

Ex qvo ſolo qvantitas rei alicujus dependet; ex hoc ſolo, magnitudo, æqvalitas & parvitas rei dependet. Ex ſola qvantitate antecedentis termini reſpectu conſequentis dependet omnis illa qvæ in rationibus conſideratur qvantitas. Ergo ex ſola qvantitate antecedentis termini reſpectu conſeqventis, magnitudo, parvitas aut æqvalitas rationum dependet. Major clara eſt, ex præcedentibus. Minor etiam omnibus

cog-

cognita est. Si enim, antecedens terminus conseqventis duplus sit; ratio est dupla: si conseqventis triplus, ratio est tripla: si consequenti æqvalis, ratio est æqvalitatis: si conseqventis subduplus, ratio est subdupla: atq; sic in infinitum. At duplum esse, triplum esse, subqvadruplum esse, est illa qvantitas quæ in rationibus consideratur. Conclusio ergo manifesta est, qvod ex sola qvantitate antecedentis termini, respectu conseqventis, magnitudo, parvitas aut æqualitas rationum dependeat.

Illud ergo quod antea Geometricè capite XIV. demonstravimus, ex hoc nostro Syllogismo verissimum esse cognoscitur: nempe, reductis binis rationbus ad idem consequens, illam majorem esse, cujus antecedens majus: illam verò minorem, cujus antecedens minus. Quoniam enim ex qvantitate antecedentis termini, respectu conseqventis, dependet magnitudo, parvitas & æqvalitas rationum: ergo, quarum antecedentia, respectu ejusdem cotseqvenris, majora sunt; eæ rationes sunt majores: & qvarum minora, illę minores: deniq;, qvarum antecedentia æqvalia, illæ rationes æquales. Veritas ergo certissima assertionum Euclidearum antea pluribus demonstrata, hinc quoq; clarissimè patescit. Unde falsitas dogmatum Meibomii una patet. Quod enim vero contrarium est: id falsum est. At Meibomius contraria hac in re Euclidi se asserere gloriatur. Quicquid ergo excipit, & qvocunq; modo se expedire conatur Meibomius, vanus falsusq; depre-

henditur. Quibuscunq; enim verbis hęc explicuerit, nisi id ipsum planè, vel verbis, vel re dixerit, qvod Euclides; falsum planè dicet, utpote vero contrarium. Si verò, sua ita interpretari voluerit, ut cum Euclide conveniant; jam ideo falsus est, qvod Euclidem falsò accusaverit. Verùm neq; crediderim, Meibomii verba ullam talem explicationem latura. Clare enim & perspicue ait: *Rationem duplam æqvalem esse subduplæ hoc est dimidiæ*, unde & tripla subtriplę ęqvalis erit; atq; sic in infinitum progrediendo. Hoc enim fundamentum est argumentationis Meibomianæ. Si enim ratio dupla ęqvalis est subduplę seu dimidię, & subtripla ęqvalis triplę, atq; sic conseqventer: ergo cum ratio tripla sit major dupla; erit & subtripla, major subdupla. Sed eodem jure concluserim ego, subtriplam rationem majorem esse dupla. Quod enim Meibomius ait æqvales esse rationes duplam & subduplam in suo genere, id sententiam ipsius plane non juvat. Qvatuor enim pedes Rhinlandici æqvales sunt duabus ulnis Sælandicis seu nostris in suo genere, hoc est, in magnitudine: qvoad numerum enim æqvales non sunt. Adeoqve, qvicqvid æqvale est, æqvalem habet qvantitatem in eo, juxta qvod æqvale dicitur. Rationes ergo dupla & subdupla, si in suo genere, hoc est qvatenus in uno genere conveniunt, æqvales sunt: invicem ergo eandem vel æqvalem habebunt qvantitatem. Æqvalitas enim in Geometricis ex sola qvantitate æqvali dependet. Argumentum

tum igitur tale ſit. *Qvicquid æqvale alteri eſt, id æqvalem alterius qvantitati qvantitatem habet. Rationes ſubdupla & dupla Meibomio æqvales ſunt. Ergo æqvalem habent qvantitatem.* Quantitas autem rationis duplæ eſt dupla, & qvantitas rationis ſubduplæ eſt ſubdupla. Ergo qvantitas dupla æqvatur quantitati ſubduplæ ſeu dimidiæ. Quo poſito, jam ex falſis conſeqventiis Meibomii argumentor. Si qvantitas dupla æqvatur ſubduplæ: ergo qvatuor pedum magnitudo æqvalis eſt duum pedum magnitudini. Sed falſum poſterius: ergo & antecedens. Ergo & ea omnia falſa, unde hæc tam vana dependent.

Alterum autem argumentum, ex qvo hoc manifeſtè falſum problema probare conatur: æqve qvidem falſum eſt, ſed minus ferendum: qvod in impium qvoddam dogma Meibominm detruſerit. Dicit rationes duplam & ſubduplam æqvali intervallo abeſſe à ratione nihili: ideoqve, inter ſe eſſe æqvales. Ut autem ſcias qvid ratio nihili Meibomio ſit, ipſum loqventem audi pag. libri ſui 190. lin. 18. *Cæterum illarum rationum mediam, qvæ ex æqvalibus terminis conſtat, qvam propterea æqvalem veteres appellârunt, nihili rationem vocat Euthymius, qvemadmodum* o *nota nulla ſeu ſiphra in abſolutis numeris nihilum ſignificat. Illas autem rationes, qvæ ex inæqvalibus terminis conſtant; qvarum infinitus numerus eſt ab utraqve parte nihili rationis ita diſcriminat, ut*

qvarum antecedens terminus major eſt termino conſeqvente, adeoqve nihili ratione ſunt majores, λόγους ὑπερβολικοὺς *Exceſsivas rationes, generali nomine adpellet: ſed qvarum contrà antecedens terminus minor eſt termimo conſeqvente, qvæ ideo nihili raiione ſunt minores, eas vocat* λόγους ἐλλειπτικοὺς *rationes Defectivas. qvomodo ratio* $\frac{9}{4}$ *eſt exceſsiva, cujus defectiva eſt* $\frac{4}{9}$. Hæc ſunt ipſius Hermotini verba ſub Euthymii, hoc eſt Meibomii perſona prolata. Verum vel hinc clarum ſit, qvanta ſit vis veritatis, ut etiam nolentes trahat. Ipſemet Meibomius ait rationes exceſſûs eſſe majores ratione nihili, rationes vero defectûs, minores ratione nihili. At ſi rationes defectûs ſeu defectivæ ſunt minores ratione nihili; ratio autem nihili minor rationibus exceſſûs: ergo, & rationes defectus minores ſunt rationibus exceſſus: adeoqve ſubdupla ratio minor ratione dupla, neqve eidem æqvalis. Hæc clariſſime fluunt ex ipſius Meibomii verbis, qvæ ipſemet ſibi ipſi tribuit: qvæq; iuter eſſentialia doctrinę ſuę proponit. Sed & planè certiſſimum illud principium pro vero agnoſcit, *rationes illas majores eſſe, qvarum antecedentia majora: minores autem qvarum antecedentia minora.* Verba ejus clariſſima ſunt, qvę antea adduxi, qvęqve hoc ſimpliciter indicant: ideo rationes defectivas, nihili rationibus eſſe minores, qvod earum antecedentes termini minores ſint termino conſeqvente: exceſſûs autem

autem rationes, ideo majores ratione nihili, qvod antecedens illarum terminus major ſit termino conſeqvente. At ſi ideo rationes ſunt majores, minorésve ratione æqvalitatis; qvia antecedens terminus eſt major minórve conſeqvente termino: ergo, qvarum antecedens terminus major eſt, illa ratio major: & qvarum antecedens terminus minor eſt, illa minor. Qvod certiſſimum veriſſimumqve pincipium, antea capite XII. & XIV. demonſtravimus. Neque Meibomius excipere poteſt hæc ſe ex aliorum mente dicere: cum & Euthymii ſententiam recitet, hæcqve claris & abſolutis verbis proponat. Sed Meibomiani dogmatis conſtantiam antea monſtravimus capite XVII. de ratione æqvali & proportionem generante. Id vero præterire neqveo, qvod ait, *rationem æqvalitatis* ſeu *qvæ eſt inter duas res aut terminos æqvales, ſe vocare rationem nihili*: præſertim cum in præfatione ſcripti ſui dicat *Deum ipſum conſiderari in ratione nihili.* At ſi Deus conſideratur in ratione nihili, conſideratur in ea juxta Meibomiũ, qvæ duos terminos æqvales habet. At termini non ſunt in Deo. Quicqvid enim in eſſentia Dei eſt, Deus eſt: neqve ab eſſentia ullo modo diſtingvitur. Vnus ergo terminus cum Deus ſit: alter terminus erunt res creatæ. Præter Deum enim nihil eſt non creatum. Cum ergo Deus conſideratur in ratione nihili, hoc eſt, ex ſententia Meibomii, illa, qvę duos terminos æqvales habet; erunt ergo æqvalia Deo: ſed hoc falſum

falsum iisq; contrariũ qvæ ait Propheta, imo Deus ipse apud Esaiã. *Cui rei comparabitisme?* Si enim consideratur in ratione nihili, habet alium terminum sibi æqvalem. At unus tantum Deus est: cętera omnia creata. Ergo creatura alter terminus erit: hęcqve Deo ęqvalis, si credimus Meibomio. Eqvidem non tam impium Meibomium arbitror, ût hęc asserat: At debebat sibi in memoriam revocasse Poetę illud:

Qværite materiam vestris, qui scribitis, æqvam Viribus,

neqve ea tractâsse qvę non intelligit. Quid porrò est ratio nihili? Certè, omnes res, si cum Deo comparentur, verè sunt in ratione nihili. Sunt enim ut nihilum. *Omnes enim gentes qvasi nihilum & inane reputatæ sunt ei* Esaię XL. Hęc ergo est ratio nihili, qvando aliqvid, cum nihilo comparatur. Est enim ratio nihili ad aliqvid. Tum qvoqve ratio finiti ad infinitum certo modo potest appellari ratio nihili: qvod nulla dari possit comparatio inter finitum & infinitum, non magis, qvàm intet aliqvid & nihil. Talis autem non est ratio æqvalitatis. Est enim inter duas res ęqvales. Ineptit ergo Meibomius, qvi heic nodum in scirpo qvęrit. Optimè enim ratio hęc, qvę est inter duos terminos ęqvales, ratio ęqvalitatis appellatur. Malè autem imò pessimè ratio nihili vocatur, pręsertim si Deus juxta Meibomium in hac ratione considerari debeat: cum nil, pręter Deum, ęquale sit Deo.

Quod

Qvod autem rationes exceſſivas & defectivas Meibomii attinet: nihil in iis novi, qvoad res ipſas, invenit Meibomius. Sunt enim eædem, qvas omnes Geometræ ſub nominibus majoris minorisve æqvalitatis cognitas habent. An vero inde egregiam laudem, ac ſpolia ampla referat, qvod duas voces barbaras in Geometriam introduxerit? id ſapientibus dijudicandum relinqvo. Satis eſt, nihil eum novi inveniſſe, aut Geometras hac in parte docuiſſe.

Ab hac autem ratione æqvalitatis, qvam ille nihili vocat, rationem duplam & ſubduplam æqvali remotam intervallo Meibomius ait: unde concludit, æqvales ipſas rationes eſſe. Argumentum ejus ſyllogiſmo comprehendam, ut inſignem omnes Meibomii dialecticam admirentur. Hoc ergo eſt. Quæcunque æqvali intervallo ab æqvalitate diſtant, ea inter ſe ſunt æqvalia. Rationes dupla & ſubdupla æqvali ab æqvalitate diſtant intervallo. Ergo ratio dupla & ſubdupla ſunt inter ſe æqvales. Sed, non mirum eſt, qvòd Meibomius Euclidi contraria ſcribat: cum ipſemet, ne eas quidem veritates perſpicere valeat, qvæ longè ſunt clariſſimæ. Sane, concluſio ipſa, in hoc argumento, facilè ipſum docere poterat, præmiſſa non eſſe vera. Utraque enim propoſitio non tantum probatione indiget; ſed& falſa eſt. Audiamus tamen Meibomium hæc explicantem pag. 106. 107. & 121. & propria principia evertentem. *Cum itaqve ratio ſeſqvialtera ⅙ tanto ſpatio abſit à ratione nihili*

hili $\frac{4}{4}$. *quanto ſpatio ab eadem nihili ratione* $\frac{4}{4}$ *abeſt ratio ſubſeſquialtera* $\frac{4}{6}$; *hæ duæ rátiones ſeſqvialtera & ſubſeſqvialtera inter ſe ſunt æquales; quamvis non ſint eædem: quod una tanto exceſſu nihili rationem ſuperet, qvanto defectu altera à nihili ratione deficit: ſeu qvod una tanto ſpatio ad dextram diſtet, quanto altera ad ſiniſtram. Inter ſe autem duæ hæ rationes ſeſqvialtera & ſubſeſqvialtera diſtant ratione biſſeſqvialtera ſeu duplaſuperquarta, qvod etiam ex additione fit manifeſtum ...... Similiter ratio biſſeſquialtera, ſeu duplaſuperqvarta* $\frac{9}{4}$ *major eſt, qvam ratio ſubbiſſeſquialtera, ſeu ſubduplaſuperquarta ratione quaterſeſquialtera, ſeu ratione biſduplaſuperqvarta, hoc eſt ratione qvintupla ſuperſextadecima.* Pagina vero 121. ait. *Eſſentia autem ſua ſubdupla ratio æqvalis eſt rationi duplæ; qvia diſtantia magnitudinum utriusqve rationis eſt æqvalis. qvippe inter duplæ rationis magnitudines* $\frac{E}{F}$, $\frac{G}{H}$ *tanta diſtantia eſt, qvanta inter ſubduplæ rationis magnitudines* $\frac{M}{N}$, $\frac{O}{I}$: *At vero, cum in diverſas partes hæ rationes tendant, dupla aſcendendo, deſcendendo ſubdupla: ratio dupla ſuperat rationem ſubduplam ratione qvadrupla. Superat autem ratio qvadrupla rationem ſubqvadruplam ratione ſedecupla.* Hæc verba ipſius Meibomii ſunt: qvę ne à me conficta arbitreris, ipſum ut legas peto. Videbis enim nil magis ſibi ipſi unqvam contrarium: nil, qvod plura abſurda ſimul continuerit. Si enim ratio dupla ſuperat ſubduplam, & qvadrupla ſubqvadruplam

druplam; ut disertis verbis heic affirmat Meibomius: ergo ratio dupla major est subdupla: & quadrupla subqvadrupla. Quod enim certa qvadam parte aliud superat, id majus est. Imò disertis verbis affirmat Meibomius rationem $\frac{9}{4}$ seu bissesqvialteram sive duplamsuperqvartam majorem esse ratione subbissesqvialtera seu $\frac{4}{9}$. At si ratio 9 ad 4, major est ratione 4 ad 9. causa non est, qvin ratio 8 ad 4, etiam major sit quam 4 ad 8. adeoque dupla ratio, major subdupla. Quod quidem longè verissimum est: sed Meibomio plane contrarium. Ipsemet igitur propria principia penitus evertit.

Sed his omnibus sepositis, formetur argumentum, ex terminis Meibomianis, pro confirmatione majoris propositionis in dato syllogismo. Hoc ergo tale erit. *Qvarumcunqve rationum magnitudines æqvaliter distant, illæ rationes sunt æqvales. Rationum duplæ & subduplæ magnitudines, æqvaliter distant. Ergo; rationes dupla & subdupla sunt æqvales.* Major minorqve est Meibomii, ipsâqve conclusio Meibomiana. Sed omnia æqve falsa. Magnitudines autem vocat Meibomius terminos rationum. nempe in fig. libri sui, paginâ 120, magnitudines rationis duplę sunt lineæ EF GH, magnitudines vero rationis subduplæ sunt lineę MN, OP. Distantiam vero vocat, qvando antecedens rationis excessûs consequens eadem qvantitate excedit, qua antecedens rationis defectûs. Ita enim in schemate ponit EF excedere magnitudinem HG.

eodem intervallo, ſeu eadem quantitate FH, qua MN exceditur à PO. nempe NP. Malè quidem voces diſtantiæ & intervalla huic rei applicantur. Quæcunque enim diſtantia fuerit terminorum ejuſdem rationis: eadem ſemper eſt ratio. Si enim EF fuerit 8. pedum, HG autem 4 pedum: ſive magnitudines hæ unam faciant lineam in duas partes inæquales diviſam; ſive vaſtiſſimo intervallo ſejungantur, & tanto qvantum eſt ab extimo cœlo ad hunc noſtrum orbem: eadem ſemper eſt ratio. Malè ergo Meibomius vocibus hiſce utitur. Indicat vero per hæc differentias exceſſus & defectus; ſicut ex ſchemate ipſius patet: ut jam vidimus. Hæc ergo Meibomii propoſitio erit claris verbis concepta, *illa ratio æqvalis eſt alteri, cujus exceſſus, alterius defectui, æqvatur.* At hoc falſum eſſe clariſſime liquet. Sint enim duæ rationes 20 ad 18, & 16 ad 18, una exceſſus, altera defectus. Jam exceſſus unius æquatur defectui alterius. Si enim auferatur á 20 exceſſus ultra 18. hoc eſt, binarius; ipſi autem 16 addatur defectus ab 18 ſeu binarius: remanet utrinque ratio æqualitatis, nempe 18 ad 18. Diſtant ergo magnitudines harum rationum æqualiter ab ęqualitate. Unde juxta Meibomium hæ rationes erunt ęquales, ſeſquinona, ſubſeſquioctavæ. 20 ad 18, ſeu 10 ad 9, rationi 16 ad 18, ſeu 8 ad 9. Eodem modo, ratio 6 ad 12, ęqualis erit rationi 18 ad 12. Si enim ſenarius, qui eſt exceſſus 18 ſupra ęqualitatem ſeu 12, auferatur à 18, idemque addatur ſenario; habetur æquali-

qualitatis ratio, nempe 12 ad 12. At juxta Meibomium. *Quarum rationum magnitudines, seu termini æqualem distantiam habent, eæ rationes sunt æquales.*

Termini autem, (ita enim loco laudato ipsemet Meibomius explicat, magnitudines) rationum 18 ad 12. & 6 ad 12. æqvaliter distant ab æqvalitate seu à 12. Tanto enim intervallo abest 18 à 12 in excessu, qvanto sex à 12 in defectu. Ergo ratio 6 ad 12 seu subdupla æqvatur rationi 18 ad 12 seu sesqvialteræ. Qvæ qvidem omnia vana sunt ac falsa. Unde & præmissa falsa sunt. Video qvidem originem erroris Meibomiani, qvem & antea attigi. Nempe, cum ex Mathemathicis didicisset, proportionem qvandam esse (nempe Arithmeticam) qva excessus unius termini, æquatur defectui alterius: sciret autem in proportione Geometrica rationes esse æquales: ergo, confusa proportione Geometrica & Arithmetica, id illi tribuit, quod huic tantum conveniret. Verum enim est, in proportione Arithmetica, unam magnitudinum tanto interuallo excedere æqualitatem, quanto altera ab æqualitate deficit. Sed id in proportione Geometrica verum non est. Tum enim Arithmetica & Geometrica proportio eadem esset. Distinxêre autem Veteres sapienter inter hasce duas: sicut ex Platone antea planum fecimus. Neque Meibomius probe argumentabitur, si, cum Euclides de proportione Geometrica aliquid demonstret: is illud verum non esse dicat in proportione Arithmetica. De eo enim du-

bium non est : neque id, vel Euclides, vel ullus Geometrarum affirmat : sed contraria docent qui de eo quicquam scripsêre.

CAP. XX.

Atque ex his liquet, etiam alterum membrum argumenti Meibomiani falsum esse: nempe, rationes duplam & dimidiam seu subduplam æqvaliter distare ab æqvalitate. Primò enim verum non est, magnitudines harum rationum ęqualiter distare ab ęqualitate, ut ipse Meibomius ait: seu, quod idem est, juxta schema Meibomii, excessum unius magnitudinis ęquari defectui alterius. Si enim rationes comparari invicem debent, omnino prius sunt reducendę vel ad unum consequens ambę, vel ad unum antecedens: alias de quantitate earum nihil certi affirmari poterit. Quæ enim mensurari debent invicem, ad communem mensuram necessariò sunt applicanda. Si enim agrũ qvendam perticâ incompertæ longitudinis mensuraveris, alium vero agrum decempedâ; quantitas agrorum inter se non datur, quíve alterum excedat majórve sit. Ita quoque rationes quę inuicem mensurantur, ad communes terminos, vel idem consequens, vel antecedens sunt reducendę. Hoc vero si fiat: nunquam antecedens rationis duplę, eodem interuallo excedet consequens, quo antecedens rationis subduplę exceditur à consequente. Conferantur enim inter se rationes 20 ad 10, & 30 ad 60. quarum quantitas ut perspiciatur:

tur: reducantur ad commune consequens, vel anteccdens: sitque ratio 5 ad 10 æqualis 30 ad 60. Ratio autem 20 ad 10 est dupla; ratio 5 ad 10 subdupla. At major est distantia 20 & 10, quam 5 & 10. Quod si Meibomius urgeat se necessariò duos tantum terminos considerare velle: ajo ipsum lucem fugere, atque ex iis argumentari, unde nulla demonstratio. Si enim dicat rationem AB ad BC in fig. XXIV. ęqualem esse rationi BC ad AB, quia AB eadem magnitudine excedit ipsam BC, qua BC exceditut ab AB: dico id falsum esse, neque ex ullo certo principio probari. Imo contrarium ex claris principiis patet. Sit enim AB 20 partium, qualium BC 10. Est ergo, ut BC ad AB, hoc est, ut 10 ad 20, sic BD ad BC, seu 5 ad 10. Ratio ergo DB ad BC seu, 5 ad 10 est ęqualis rationi BC ad AB seu, 10 ad 20 At ratio BC ad AB juxta Meibomium est æqvalis rationi AB ad BC. ergo & ratio DB ad BC juxta eundem ęqualis erit rationi AB ad BC. Quę enim eidem æqvalia, etiam inter se sunt æqvalia. At si hoc verum: utique pars ad idem æqvalem habebit rationem toti. Quæ autem æqvalem ad idem rationem habent, ea inter se sunt æqvalia. Ergo pars erit æqvalis suo toti. Hæc sunt conseqventiæ Meibomianæ. Qvod veró ait Meibomius ideo rationem subduplam ęqvari duplę, quod eadem operatione, ambæ rationes ad æqvalitatis rationem reducantur: id falsum est. Verum qvidem est mutua antecedentium & conseqventium multiplicatione reduci ambas ad æqvali-

qvalitatem. Sed hujus rei ratio ex præcedentibus petenda eſt. Quando enim ratio exceſsûs conjungitur cum ratione defectûs, tum, illa qvidem dividitur ac imminuitur, hæc autem componitur atque augetur. Ideoque, in illa conjunctione duplex eſt operatio, hujus qvidem diviſio, alterius vero compoſitio. Antea enim demonſtravimus omnes rationes fieri ex ratione æqualitatis, exceſsûs qvidem componendo, defectûs vero dividendo. Si ergo defectûs rationes ad æqualitatis rationem reduci debeant: contraria operatione id fieri oportet, nempe componendo: & ſic rationes exceſsûs dividendo. Eodem modo, qvo ſi magnitudo BD foret ſubſeptupla ipſius BC, AB autem ejuſdem BC ſeptupla, ſi AB divideretur in ſeptem æquales partes, & BD multiplicaretur ſepties, factum utrinque foret æquale. Ita etiam ſi ratio ſubſeptupla per ſeptuplam componatur, & ratio ſeptupla per ſubſeptuplam dividatur; utrinque prodit æqualitas: cujus rei demonſtratio ex iis petenda eſt, quæ de diviſione & compoſitione rationum antea ſunt dicta. Liqvet ergo ex his, ea omnia quę Meibomius contra Euclidem adducit, non tantum incertis & dubiis, ſed & plane falſis principiis niti. Neq; aliter fieri poterat. Cum enim certis ex principiis demonſtratum antea dederimus, Euclidis aſſertiones longe eſſe veriſſimas; impoſſibile plane eſt, contrarium ipſarum falſum non eſſe. Nihil enim ſimul verum & falſum eſſe poteſt. Quod autem exempla ipſius attinet, ea omnia, vel nihil plane concludunt, vel

id

id quod nos hucuſque demonſtravimus. Adeoque nulla in re ipſi uſui ſunt. Quæ enim itinera inter ſe ſunt æqualia, ſive à dextris, ſive à ſiniſtris, ſive ad Orientem, ſive ad Occidentem inſtituantur: ſemper ſunt æqualia. Unde id, quod eſt in quæſtione, probare nequeunt, rationem duplam æquari dimidiæ. Quid enim ad rem facit, ſi Sejus verſus ſiniſtram progrediendo duplum itineris Nonii fecerit: Męvius vero ad dextram pergendo, æquale quidem iter Sejo, duplum vero Octavio Nonioque fecerit? Si enim iter Seji duplum eſt itineris Nonii, æquale autem itineri Mævii: erit & iter Mævii, duplum itineris Nonii: ratioq; itineris Seji & Mævii, ad iter Nonii & Octavii æqvalis, utpote dupla: ratio vero itineris Nonii dimidia, adeoque minor. Sed neque exemplum illud, quod de mercatoribus Cajo, Lucio, Mævio, Sejo &c. ponit, huc quicquam facit. Qui enim nihil in bonis habent: neqve qvoad opes poſſunt cum divitibus comparari: cum nulla ratio ſit inter aliquid & nihil. Bona quidem cum ære alieno comparari poſſunt. Sed ut duæ res, quę quantitatem habere conſiderantur. Ac ſi bona excedant debitum: ratio quidem bonorum eſt exceſsûs: ſi vero debitum excedat bona, ratio æris alieni eſt exceſsûs. Adeoque, ex his nulla demonſtratio de rationibus petitur: cum utrique parti eædem rationes conveniant. Denique, quod ex muſica adducit, ſi æqualibus chordis appendantur inæqualia pondera, uni quidem 18. alteri 12. tertiæ 8. faciet quidem

dem prima ad ſecundam, diapente intenſum : tertia vero cum ſecunda, diapente remiſſum. Quod ſi ergo illi ſoni majores ſint appellandi, qui ex majore tenſione proveniunt: major ſonus erit diapente intenſum, minor diapente remiſſum : adeoque, ratio ſonorum dependebit ex ratione tenſionum, hoc eſt, ex ratione ponderum. Unde erit in diapente intenſo ut 18 ad 12: in diapente remiſſo, ut 8 ad 12. adeoque illic ratio major, heic minor. Ipſa ergo MEIBOMII exempla contra ipſum concludunt.

Id ergo demonſtravimus MEIBOMIUM Euclidem cœteroſque Geometras falſi atque ignorantiæ accuſando, miras falſitates committere : & eos quidem ab errore liberos eſſe ; ipſum vero MEIBOMIUM falſiſſima, quæque clariſſimis ac certiſſimis axiomatibus convincuntur, in medium adferre. Atq; hoc modo, verum quidem eſt, MARCUM MEIBOMIUM nova quædam propoſuiſſe : quę tamen talia ſunt; ut nemo, qvi inter verum ac falſum diſtingvere poteſt, ea ab ipſo diſcere percupiat. In Euclide enim accuſando plane ſe inſenſatum, ſi non mente captum monſtravit : qvod ea pro veris ſupponat, quæ nemo ſana mente præditus falſum eſſe non videt : in Theone autem cœteriſque Geometris inſignem vel oſcitantiam, vel ſtuporem, vel malitiam: cum earum rerũ ignorantiã iis objiciat, qvas optime noverunt. Unde vaniſſima & falſiſſima eſt ipſius jactantia, quã pagina nona libri ſui proponit, qvamq; nos pagina 4. ſub initium hujus operis exſcripſimus. Verba iterum repetam.

repetam. *Itaq; & recentiores omnes reprehendã, qvi antiquos non intellexerunt; Et antiquos corrigam, qui male quædam prodidèrunt; Utrosque insuper noua docturus.* Verum nec ullo vel verisimili argumento probauit recentiores, antiquos non intellexisse: multo minus, antiquos Geometras male qvædã prodidisse. Nova autem, Geometris vel antiquis, vel recentioribus ignorata nulla plane proposuit, præter somnia & deliria. quod illi verum esse fatebuntur, qui hæc legerint. Quæ enim de duarum linearum appropinquatione, sine concursu, in infinitum habet, illi ignorare nequeunt, qui lineam in infinitum, dividi posse norunt: quod nulli Geometræ ignotum est, Quod autem lineam in tres partes secare doceat, id faciliori methodo tyrones Geometriæ expeditum dabunt: sicut & compositionem rationum. Cœtera omnia nugæ sunt & qvisqviliæ, nec sapientum ocio digna. Quis enim tantam ac tam effrænam aliis maledicendi libidinem: tam portentosos errores, tam stolidam ac ridiculam jactantiam quieto stomacho ferre posset? Sane, vel ultima hæc, etiam Stoico, si non bilem saltem risum moveret: cujus ego specimen, si heic dare vellem, comœdiam forte Lectori ob oculos ponerem, & post Plautum, non Militem, sed Literatorem Gloriosum conscriberem. Consilium quidem Meibomio dederim, ut si quid post hac in publicum edere velit, semper vulgatum illud ob oculos habeat.

Nec te laudâris, nec te culpaveris ipſe:
Hoc faciunt ſtulti, quos gloria vexat inanis.

Neque enim ullum videbis magis ambitioſum, qvique ſibi plus ſapientiæ tribuat, alios autem omnes præ ſe contemnat, quam mente motum, aut ſingulari quadam ſtultitia occupatum. Quod ſi exiſtimaverit ſe maledicendo pervincere velle: idem ipſi eveniet quod canibus: qvi, cum diu allios allatrarunt, ubi ſe contemni viderint, nec quicquam à quoquam opponi: demum ſilent ingratiis. Sanè, Meibomii cauſa ne hæc qvidem ſcripſiſſem, quamvis inter cœteros Mathematicos provocatus. Si enim corrigi vellet: vel privatâ admonitione id fieri poſſet. Quoniã vero quidã viri graves & prudentes, quibus ocium non eſt, iſta examinandi; ſententiam tamen ferre noluerint, ante rem probè cognitam: hiſce demonſtrare volui, omnem contra Euclidem inſtitutam accuſationem, hoc fundamento niti: *duplam rationem æqualem eſſe ſubduplæ ſeu dimidiæ: & triplam ſubtriplæ*, atque ſic porro in aliis. quod, quale ſit: ipſi nunc judicent.

Hac autem contra Marcum Meibomium ſcribendi occaſione data, etiam Secpticorum, atq; imprimis Sexti Empirici argumenta examinare ac refutare occœpi, qvi non unam aliquam veritatem, ut Meibomius, ſed omnes in Geometria, aliiſque ſcientiis evertere conatus eſt, qvamvis longe majori ingenio, & argumentis perquam ſpecioſis. Si enim Lectorem is nactus fuerit in Geometricis non probe ſubactum,

facilè

facilè in errorem ipſum perducet: cujus rei nullum à Meibomio periculum, modo Lector ratione uti velit. Noſtra vero quod attinet, ita ea legi cupio, ut ſi qva in re lapſus fuerim, eô me modô Lector candidus & benevolus erroris moneat, quo ſuos ſibi nævos indicari optaret. quibus non ipſe minus obnoxius erit, ſi, agendo ſpectari velit.

Hanc veniam petimuſq; damuſq; viciſſim.



SUMMÆ CAPITUM.

LIBRI. I.

CAPUT. I.

DE materia & certitudine ſcientiarum. Cur Geometricæ & Arithmeticæ veritates, aliis omnibus in Philoſophia veritatibus ſint evidentiores? Geometras aliquando labi, in verbis, aut falſâ methodo. Hos qvi corrigunt, laude digni: qui autem falſo accuſant, vituperio. Marci Meibomii jactantia; & qvam vana: cum nihil novi invenerit, niſi qvod falſum eſt. Summa totius ſcripti.

CAP. II.

DE Sceptica Philoſophia. Auctor ſectæ Pyrrho. Hujus mores, inſtituta & vanitas. Scepticorum ſcire, eſt omnes ſcientias deſtruere. Sexti Empirici ſcripta.

CAP. III.

AN Mathematico aliquid ſit ſumendum ex hypotheſi. Quid ſit hypotheſis ex Sexto, Ariſtotele & Stoicis, juxta Proclum? Quid Ariſtarcho Samio & Archimedi? Accurata vocis explicatio. Differentia inter Axioma, Definitionem, Hypotheſin & Poſtulatum. Qvalis ſit Hypotheſis Geometrica? Definitiones Geometricæ. Axiomata Geometrica. De falſis hypotheſibus apud Geometras.

CAP.

CAP. IV.

SExti Empirici argumenta, contra Hypotheses Geometrarum, expenduntur: &, vel nihil ad rem facere; vel, ex ipsius Sexti sententia, falsa esse, monstrantur.

CAP. V.

DE definitionibus Geometricis, earumque utilitate. Puncta, lineas, superficies & corpora Geometrica, verè dari: & id esse, quod à Geometris esse dicuntur. Sexti argumenta refutantur. Punctum motum, lineam describere, demonstratur.

CAP. VI.

LIneas rectas in infinitum dividi posse, quamuis nunquam ad punctum veniatur. Concurrere autem in indivisibili seu puncto. Lineam ex punctis non componi.

CAP. VII.

DEmonstratur, maximam & minimam lineam, æqualia numero puncta habere: & tot in una concipi posse, quot in altera. Falsus ergo Sextus, qvi punctum lineæ magnitudinem explere dixit. Natura indivisibilium, & in infinitum divisibilium, humano ingenio non comprehenditur. Id in numeris, quadratis, cubicis, & sic porrò progrediendo, demonstratur: & quod, in infinitis, mille, & centum, & tria, & unum non distinguantur: adeoque, nec infinitorum natura percipiatur. Unde concluditur, si in naturalibus infinitis, nihil humana mens capit: multo minus, in diuinis.

CAP.

CAP. VIII.

SExti argumenta, quibus probare conatur, punctum esse diuisibile, refutantur. Demonstratur, nec puncta, lineæ; nec lineas, superficiei corporisve partes esse: quamuis eorundem sint extrema. Punctum non est in loco.

CAP. IX.

AN linea sit fluxus puncti? Superficies tangunt se in linea, inque infinitum dividuntur: nec tamen unquam ad lineas pervenitur.

CAP. X.

SUperficiem, neque ex lineis componi, neqve in lineas dividi. In minori superficie, totidem lineas esse, quot in maxima, Geometricè demonstratur: Tum quoqve, si mille, centum mille, imò, quotcunque invicem in latum jungantur lineæ: unam tantum lineam facere, omnis expertem latitudinis.

CAP. XI.

SExti argumentum, de circulis latitudinem efficientibus, refutatur: unaque demonstratur, peripherias nullam latitudinem habere.

CAP. XII.

DE compositione & divisione Geometrica, quomodo differt à Mechanica. Terminos in compositione

Geo-

Geometrica tolli, sine corporis detrimento: & rursum in in divisione dari: In Mechanica vero, non item.

CAP. XIII.

DUo Sexti argumenta refutantur, unum, qvo demonstrare conatur, lineam, qvia latitudinem mensurat, omnino latitudinem habere: alterum, Superficiem ex lineis componi, cum evolutus, super planum, Cylinder, in lineis planum tangat; planam autem superficiem describat.

CAP. XIIII.

DE contactu corporum, qvomodo fiat? Sexti argumenta refutantur, corporaque se invicem extremis tangere demonstratur. Alterum Sexti argumentum, quod corpus Geometricum sit imperceptibile, cum neque sine latitudine, longitudine, crassitiéve sit; neque illud sit; ideoque nihil sit: imperitiæ arguitur. Multa enim in corpore esse accidentia, sine qvibus corpus non est: nec tamen accidentia illa, esse corpora.

CAP. XV.

DEfinitio rectæ lineæ. quid sit recta linea Euclidi? quid Archimedi? Utriusque definitio idem concludere demonstratur, ex Proclo: rectæque lineæ natura explicatur. Sexti argumenta contra definitionem anguli, Geometriæ non adversatur, nec qvicquam contra hujus principia concludunt.

CAP. XVI.

DE anguli definitione. Accuratissima anguli definitio Geometriæ non necessaria. Demonstratur angulum nec in Prædicamento Quantitatis, nec Qualitatis esse, contra Eudemum Peripateticum, Plutarchum Mathematicum, ejusque asseclam Apollonium, & Carpum Antiochenum. Euclides non videtur in Prædicamento Relationis angulum ponere, quod ait Proclus. Angulus est in Prædicamento Situs. Lineam bifariam diuidi posse; contra Sextum demonstratur: nec tamen punctum ideò bifariam, ullóve modo dividi: sicut neq; in circuli divisione.

CAP. XVII.

EUclides non omnes definitiones adduxit: sed qvasdam omisit, non tantum utiles; sed etiam aliquo modo necessarias. An ideo malè tractari debeat?

CAP. XVIII.

DE Axiomatibus Geometricis. Carneadis stultitia, qvi Axioma hoc negavit (Quæ eidem æqvalia, etjam inter se sunt æqvalia) *à Galeno repressa. Ea quæ nunc in editione Græca Euclidis pro Axiomatibus habentur, non omnia, ab ipso Euclide, pro talibus posita fuisse: sed tria posteriora, vel saltem duo ex istis inter postulata. Videri Theonem Alexandrinum, ejúsve domesticos, hæc ita ordinasse, ut nunc leguntur.*

CAP.

CAP. XIX.

Apollonium & Euclidem in demonstrando lapsos, illum qvidem, qvod ea demonstrare conaretur, qvæ demonstrari neqveunt, ut Axiomata; unde illud coactus fuit supponere, qvod minus clarum est: hunc autem, ea pro ἀναποδείκτοις assumendo qvæ demonstrari & possunt & debent.

CAP. XX.

Postulatum illud, qvod in Græcis Euclidis editionibus pro X Axiomate ponitur, omnes nempe angulos rectos invicem esse æqvales, *Geometrice à Proclo demonstratur. Videntur Pappus pariter & Proclus ea in re παραλογισμὸν commisisse, qvod angulos circumferentiarum recto æqvales sint arbitrati, qvi tamen recti non essent. Ipsa horum demonstratio examinatur.*

CAP. XXI.

Postulatum V. seu Axioma XI. (juxta codices Græcos editos I. Elem. Euclidis,) demonstratur, primùm qvidem à Ptolomæo, qvamvis minus sufficienter: inde plenius & melius à Proclo.

CAP. XXII.

Contra Epicureos probatur, non male egisse Euclidem Veteresque ante eum Geometras, qvi accurate demonstrarunt, in triangulo rectilineo duo latera majora esse tertio. Dari triangula, in qvibus unum latus sit majus binis reliqvis. Conclusio primi libri.

LIBRI. II.

CAP. I.



Roæmium libri secundi. Euclidem ob quædam omissa, & confuse tradita accusari quidem posse: Meibomii tamen accusationem longè ab hac diversam, & planè falsam.

CAP. II.

QUid sit quantum, & quotuplex? ex Archyta Tarentino. Quid sit ratio in Geometricis, Arithmeticis & Staticis. Termini rationum. Divisio rationum, in æqualitatis, & inæqualitatis: ac harum, in excessûs & defectûs. Altera rationum divisio, in effabiles & ineffabiles. Effabiles aliæ sunt simpliciter tales, aliæ, potentia tantum. In arithmeticis omnes rationes sunt effabiles. Divisio rationum effabilium excessus in quinque species: & defectus in totidem. Ratio multipla & submultipla. ubi de subdupla, subtripla, subquadrupla &c.

CAP. III.

DE ratione superparticulari, quæ Græcis λόγος ἐπιμόριος dicitur: & huic opposita ὑπεπιμόριος. Ejus species variæ, sesquialtera, sesquitertia, sesquiquarta, sesquimillesima: quibus opponuntur subsesquialtera. Quid sit ratio subsesquimillesima. In numeris, pro dignos-

dignoſcendis rationibus , ſemper recurrendum erit ad primos numeros , qvi Græcis πυθμένες *dicuntur. Qvid voces* ὑπόλογος & πρόλογος *Græcis ſignificent.*

CAP. IV.

QVid ſit ratio ἐπιμερὴς & ὑπεπιμερὴς, *ſeu ſuperpartiens & ſubſuperpartiens ? Qvid* πολλαπλασιεπιμόριος *ſeu multiplaſuperparticularis ? Hujus variæ ſpecies , nempe duplaſeſqvialtera , duplaſeſqvitertia , duplaſeſqviqvarta ; & ſic triplaſeſqvialtera, triplaſeſqvitertia &c. His autem oppoſitæ ſunt , qvibus particula ſub præponitur. Ratio* πολλαπλασιεπιμερὴς *ſeu multiplaſuperpartiens : huicque oppoſita* ὑποπολλαπλασιεπιμερής. *Omnes rationes effabiles paucis explicantur. tum quoq;* λόγος ὑπεροχῆς *ſeu ratio exceſsûs & huic oppoſita ratio defectus. Cur ineffabiles* κατ' ἐξοχὴν *ita appellentur.*

CAP. V.

DE rationibus ſimplicibus & compoſitis. Qvid ſit compoſitio in Geometricis. Compoſitio alia fit addendo , alia multiplicando. De additione rationum ex Euclide & aliis. Ex ratione æqvalitatis omnes rationes exceſſus componuntur. Uſus additionis rationum in Mechanicis. De multiplicatione rationum. Additione rationum ambo termini non conjunguntur. Locus Ariſtotelis explicatus. De multiplicatione rationum in lineis. Uſus multiplicationis rationum in Harmonicis.

CAP. VI.

De divisione rationum. Hujus natura ex partium relatione ad totum explicatur, variisque exemplis illustratur, & qvomodo divisio fiat multiplicando. Compositio rationum excessûs, qvæ κατ' ἐξοχὴν *ita vocatur, & divisio rationum defectûs, eodem fit modo: multiplicando utrosque terminos inuicem.*

CAP. VII.

Ratio æqvalis & inæqvalis, qvid? Qvomodo rationes æqvales investigentur? De multiplicatione & divisione magnitudinum, præsertim linearum. Qvid ratio æqvalis Euclidi & Aristoteli? quid Theoni Smyrnæo? Hic non semper satis accuratus in scribendo. Marcus Meibomius falso omnes in genere Geometras accusat. Qvid rationes majores & minores Euclidi, Aristarcho Samio, Archimedi & Theodosio.

CAP. VIII.

De multiplicatione & divisione rationum secundum modum procedendi in magnitudinibus. Simplicissima Methodus multiplicandi & dividendi rationes, unde etjam natura ipsa compositionis hujus cognoscitur. Differentia compositionis & divisionis. Propositio XXIII. libri VI. Elem. Eucl. explicatur.

CAP. IX.

An Euclides Propos. XXIII. lib. VI. distinxerit inter multiplicationem & divisionem rationum. Qvid

συγκεῖ-

συγκεῖσθαι & συντίθεσθαι Euclidi. De definitione compositionis rationum Euclidea. Modus dividendi rationes defectûs per multiplicationem amborum terminorum invicem, idem plane est, ac ille, qvo rationes excessus componuntur. hujus rei causæ.

CAP. X.

ADditio, multiplicatio, subtractio & divisio rationum plenius atque accuratius explicantur. Probatur additiouem rationum vere & proprie esse & vocari rationum compositionem. Duplatio, triplatio, quadruplatio &c. rationum qvid sit: ut &, quid ratio dupla, tripla qvadrupla, sesquialtera? Quid ratio subdupla, subtripla. De rationum multiplicatione & divisione: quid ratio duplicata, triplicata? ut & subduplicata, subtriplicata &c. & quomodo distingvantur à dupla, tripla, subdupla, subtripla &c. Meibomii error hæc confundentis: ejusque iniqua & imperita censura. Qvid διπλασίων, τριπλασίων? Geometras recte distinxisse inter rationes duplicatas & duplas. Novi heic nihil invenit Meibomius.

CAP. XI.

MArci Meibomii temeritas, qui sine omni causa, imò sine omni ratione, Geometras inscitiæ arguit: Græcis vero doctissimis, iisque satis antiquis, propriæ linguæ ignorantiam objicit: cum tamen neque hi, neque illi quicqvam erraverint. Idem in Theone

Alexan-

Alexandrino accuſando, crimen falſi committit: idque duplici nomine. Falſo quoque Eutocium accuſat: ut vel neutrum legerit; vel clarè ac planè loquentes non intellexerit; vel mala fide uſus fuerit. Quid ποσότης & πηλικότης Græcis Geometris & Philoſophis? Sectatorum Lucii & Nicoſtrati error. Meibomii in his lapſus & inconſtantia. Nicomachi Geraſeni ſententia. Inſignis locus Ariſtotelis, qui optime explicat quid ſit τὸ ποσὸν: ſicut locus quidam Ptolemæi τὸ πηλίκον. Quomodo differant inter ſe ποσὸν & πηλίκον? Theo Alexandrinus & Eutocius recte rationes compoſuerunt: ideoque à calumniis Meibomii vindicantur.

CAP. XII.

AN Euclides diuiſionem rationum ignorauerit? Probatur, re & opere eam cognitam habuiſſe: atq; una demonſtratur, compoſitionem rationum, quæ fit multiplicando, verè à diviſione rationum diſtingui. Definitiones X. & XI. lib. V. Elem. Euclid. explicantur. Methodus breuiſſima componendi & diuidendi rationes omnes, tam exceſſus quam defectus proponitur, ac Geometricè demonſtratur.

CAP. XIII.

DE medietatibus Geometricis, Arithmeticis & Muſicis. Quid αναλογία & proportio? Locus inſignis hac de re Platonis in Timæo à Cicerone Latine redditus. Quid αναλογία Theoni Smyrnæo. Infælicitas critica

Mei-

Meibomii, atque in Græcis Latinisque, imò, & in Musicis, imperitia & audacia. Scaliger & Commandinus iniquè atque imperitè à Meibomio accusati. Rationes Musicæ explicantur. Locus pulcherrimus Platonis, in Timæo, de Harmonia Universi & proportionibus ejusdem explicatus. De animæ natura ex Timæo Locro.

CAP. XIV.

DEmonstratur Geometricè, aucto antecedente alicujus rationis, eodem consequente retento, ipsam rationem augeri & majorem fieri: imminuto autem antecedente, rationem imminui. Retento autem eodem antecedente, si consequens augeatur, ipsam rationem imminui: & si consequens imminuatur, ipsam rationem augeri. De ratione majore & minore: & quomodo utraque inueniatur? Ratio dupla, major esse demonstratur, subdupla; & tripla, subtripla: & sic in infinitum.

CAP. XV.

DEfinitiones rationum æqualium & inæqualium Euclidis explicantur, falsoque à Meibomio accusari, demonstratur Geometricè. Propositiones quoq; Euclidis octaua & decima libri quinti Elementorum ab iniqua & falsa censura Meibomii vindicantur, & verissimæ esse demonstrantur.

CAP. XVI.

MEibomii argumenta contra prædictas Propositiones examinantur. Ejus vanitas, arrogantia falsumq;

ſumq; dicendi libido. Præcipui errores Meibomii, in Euclide accuſando commiſſi, recenſentur ac refutantur. Rationes exceſſus & defectus comparari invicem poſſe, demonſtratur, contra Meibomium, ex variis: imo ex ipſius Meibomii teſtimonio. Inter quæ ratio ſumatur? Mala argumentatio Meibomii. Rationes exceſſus & defectus communem menſuram habent.

CAP. XVII.

AN rationes exceſſus & defectus inuicem ideo comparari nequeant, quod multiplicatæ ſe invicem non excedant? Poſito, rationes exceſſus & defectus comparari invicem non poſſe; ne tum quidem jure Euclidem à Meibomio accuſari. Quomodo ratio defectus ita poſſit augeri, ut rationem datam exceſſus ſuperet. Inconſtantia Meibomii, qui proprium dogma euertit.

CAP. XVIII.

EXemplis illuſtratur Propoſitio illa antea Geometrice demonſtrata : qvarum antecedentia majora, eæ rationes majores : & qvarum minora; minores. *Meibomii principium Geometricum, manifeſte falſum. Falſæ & abſurdæ concluſiones ex Meibomii falſis principiis deductæ. Proportionalia Meibomio hæc erunt: ut. 2 ad 8, ſic 64 ad 16. Inventum Marci Meibomii illis quidem utile eſt, qui fraudem creditoribus facere vellent: ſed ita forte ipſi Meibomio noceret. Quid ſit æquari in ſuo genere? Quid duplum? &c.*

CAP.

CAP. XIX.

ARgumenta contra Meibomium, ipsiusque Meibomii, Syllogismo includuntur: ut horum vanitas, illorum autem veritas facilius perspiciatur. Meibomius nullo modo à falsitate liberari potest, siue idem cum Euclide dicat, siue contrarium: cum posterius per se falsum sit; prius vero ideo Meibomium damnet, quod falsò Euclidem accusaverit. Ipsemet Meibomius sua principia evertit, nostraque seu Eucidis confirmat. Ratio æqualitatis malè ac inepte à Meibomio, ratio nihili appellata. Quàm imperitè de rebus sacris loquatur, dum Deum ait considerari in ratione nihili. De vocibus ipsius excessiuis & defectiuis. Rursum principia sua euertit, nostraque confirmat. Perversa argumentatio Meibomii. Meibomius confudisse videtur proportionem Geometricam & Arithmeticam: unde etiam error ipsius originem sumpsit.

CAP. XX.

TErmini rationis duplæ & subduplæ non semper invicem distant æqualiter. Meibomii absurda & falsa. Probationes omnes Meibomii vel manifeste falsæ sunt, vel nihil concludunt, vel contra ipsum concludunt. Jactantiam Meibomii falsam vanamque esse. Nihil enim noui Geometras docuisse, quod antea ignorabant, nisi quod falsum esset. Neque jure, aut ulla cum veritatis specie, vel antiquos, vel nouos Geometras accusasse. Conclusio operis.



Scriptores qui hoc in opere laudantur, defenduntur, castigantur, refutantur.

ANacharsis Schyta.
Apollonius Pergæus.
Archimedes Syracusanus.
Archytas Tarentinus.
Aristarchus Samius.
Aristophanes Comicus.
Aristoteles Stagirita.
Carpus Antiochenus.
Cicero.
Clavius.
Diogenes Laertius.
Euclides Geometra.
Eudemus Peripateticus.
Eustathius in Homerum.
Eutocius Ascalonita.
Federicus Commandinus.
Galilæus Galilæi.
Geminus.
Homerus.
Juvenalis.
Lucas Valerius.
Marcus Meibomius.
Nicomachus Gerasenus.
Pappus Alexandrinus.
Plato.
Plutarchus Mathematicus.
Proclus Lycius.
Ptolemæus.
Scholiastes Euclid. Dasypodii.
Sextus Empiricus.
Simplicius.
Theo Alexandrinus.
Theodosius Tripolita.
Theo Smyrnæus.
Thomas Finchius.
Timæus Locrus.

Lectori Benevolo S. P.

NOn mirabere Lector, qvod multa hoc in opere librariorum negligentia perperam edita atqve exarata invenias; qvædam vero omiſſa; alia autem bis poſita: cum, nec ego operis corrigendis tam anxiam curam impendere potuerim, gravioribus negociis occupatus; neqve alium haberem, qvem hiſce rebus præficerem: ipſi qvoqve typothetæ, ea aliqvando mutare noluerint, qvæ ego emendari mandabam. Pleraq; tamen ex literarum ſimilium, aut vicinarum permutatione nata ſunt: ac ſæpe qvidem c pro e, f pro ſ, n pro u, r pro t, & vice versâ, poſita: in Græcis autem, ϰ pro η, ο pro υ, υ pro ν, χ pro ϗ. In accentibus qvoq;, tonis & commatibus coliſqve non ſemel erratum: qvæ tamen Lector per ſe facile emendabit. Ego qvædam inſigniora, qvæ inter perlegendum occurrerunt, heic annotare volui: atqve ea qvæ omiſſa aut depravata erant, indicare. Cœtera tuo Candori atqve eruditioni committo. Vale & fave, virtutiq; & veritati aſſiduam operam impende feliciter.

Corrigenda, addenda.

Numerus barbarus, ſeu prior, paginam, poſterior ſeu Romanus lineam indicat.

P*Ag. 5. lin. I.* methodo. *6. IV.* accuratius 7. *II.* ἔφασκεν. *Ibid. III.* αἰσχρὸν 10. *I.* ὑποθέσεις. *Ibid. XVIII.* ὥς πȣ̃ φησὶν. *Ibid.* XXII. ἀυλόπιστον. 11. *XV.* figura. *Ibid.* XIX fuerit. *Ibid.* XX aſſumitur 12. *XII.* ἀποσημάτων 16. *IV.* neceſſario. *Ibid.* XIII. ȣ̓χ᾽ ἁπλῶς. *Ibid.* XV. λαμβάνη, 22. *XXVI.* foret. 23. *ult.* ἐξ. ἀνυπάρκτων 24. *XXI.* noſtrum. 31. *XVII.* extremum. 32. *XII.* punctus. *Ibid.* *XXVI.* animalcula 34. *II.* terminatam. 37. *XXIII.* qvod. 38. *VI.* eſt lineam 39. *V.* lineam. AL 40. *XVI.* compoſita, tum qvoplura. 48. XVI. infinita. *Ibid.* XXVIII. infinita 51. XVII. autem. 52. XVIII. deſcribatur ſemicirculus. 53. XII. coni. BZY. *ibid.* XVII. conus BGH. ſecentur. 54. V. portio cylindrica. XIX. qvadratum. 60, II. καὶ ἰσότητα. 61. II. parallelogrammum. 65. III. infinitas numero lineas. 66. XVII. angulus FbA. *ibid.* triangulo AFb. 68. XXI. ac vaſtiſſimum. 73. IV. unicam. 75. XIX. ſententia. 85. XI. & D extremum lineæ 95. XVI. tamen 96. VI. σύνοδος. VII. ἀντίτυπον. 106. XV. ſecundum longitudinem ſumitur. 108. IX. tali *deleatur* 115. XV. *poſt* lineam eſſe *inſer.* Neque enim omne illud, qvod juxta unum punctum diſtat, lineam eſſe. 118. XI. figuras. 129. XXI. φησὶν. 130. XI. qvartum. 140. XIII. angulus BAΓ. 141. V. peripheriam BM. vel BI. 142. XVI. βζη, δηζ. 143. XVI. diagramma XIII. 144. XI. nempe βζη & *ibid.* XV. recta, binos. *ibid.* eaſdē XVI. qvæ in ζβ, ηδ. 146. VI. illud vel verſus γ. *ibid.* VIII. dempto *ibid.* IX. qvàm ηζκ. 147. XVIII. ἡ εζη. 148. III. ἀυτὰς ἡ εζ, *ib.* IV. βεζ, δζε, λεγω. V. *ib.* αἱ ἀπὸ βεζ. *ib.* VII. εἰς τὰς κθ. γδ. *ib.* VIII. τὰς ἀπὸ θεζ. 151. I. objectioni. 155. XIV. figuram num. II. 157. V. Publicus. 160. VIII. Archytas.

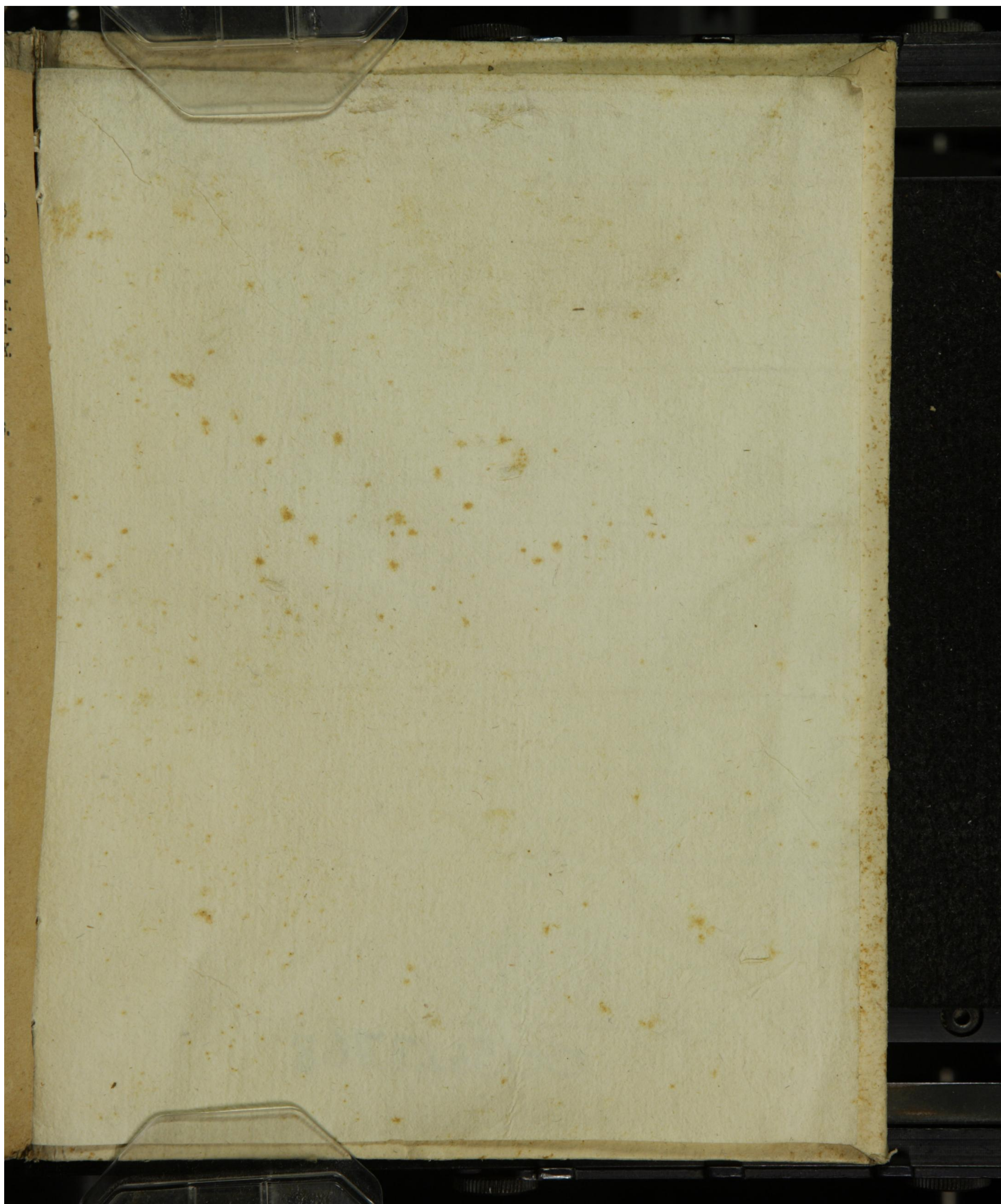
chytas. *ib.* XX. triangulare 161. IX. ὁμογενῶν, ἡ κατὰ 164. XVI. σύμμετρα. *ib.* XVII. τῆς συμμελείας. 166. XIII. ἢ ἐλάττονος. 167. VII. *post* multipla *Adde.* Vide tamen de his, qvæ in seqventibus, de partium nomenclatura traduntur. 170. VII. πάλιν ἐν τῷ 175. VI. in infinitum. 176. XV. πολλαπλάσιον 178. XVIII. octuplo-sesqvicentesima vicesimaqvinta. 179. XXII. ad 10. sesqviqvintam, ad 11. sesqviundecimam. *Ibid.* XXVII. 9 ad 12. 180. I. & II. *lege* 11. ad 12. ὑφεπιπέμπτος subsesqviqvinta & denique ὑπεφενδεκάτος subsesqviundecima 11 ad 12. *ib.* IX. nempe ὑπεπιπενταμερής. *Ibid.* XI. *lege* 11 ad 5. est duplasesqviqvinta & 5 ad 11. subduplasesqviqvinta. *Ibid.* XIV. Deniqve 12 ad 5. 188. XII. *post verba* antecedentes componuntur *Adde.* Nihilo tamen minus vera est rationum compositio, qvamvis ab altera qvæ fit multiplicando distingvatur: de qvibus accuratius in seqventibus. 189. VII. jungantur CD. GH: tota CDGH. 191. VIII. ad duo. 190. XXV. constituatur in fig. num. III. ex AB. 194. VI. ratio $\frac{4}{3}$, seu sesqvitertia 195. XVII. qvadrati alicujus. v. g. ABCD in fig. num. I. *Ibid.* XVIII. qvadrati AF. *Ibid.* XIX. basis AE baseos AB. XXI. basis AE diagonalem AC 196. XX. numerus ad numerum 198. XXVII. magnitudo AB in fig. num. IV. 200. XIII. qvales AF. *ib.* XIIII. minus BF. 201. I. *deleantur* & conseqventia cum conseqventibus. *Ibid.* V. & VI. *lege*, Compositio ergo perfecta rationum excessus, & perfecta divisio rationum defectus eodem &c. 202. XXI defectus. 207. XXII. ut EA. 215. XVII. illa. 217. I. E ad C. 222. II. ΔΓ ad ΓE. *Ibid.* XIII. *post* divisionem. *nova linea.* CAP. IX. 224. XII. factam. *ibid.* XX. enim in figu. num. XI. 225. IV. ut ΔΓ ad ΓE. 226. II. ΔΓ ad parallelogrammum. 231. XXVI. fig. num. XI. vectis. 233. XXV. BACDLM semissem. *ibid.* XXVIII. Adeoqve. 237. XIX. triangularia LOK. *ibid.* XXV. prisma lOL. 238. II. oL. horizonti. 240. XXVIII. seu GE. 241. I. rationem EG. *ibid.* XVII. GE ad BF. *ibid.* XVIII. GE ad BE. 244. XX. aliqvam 246. XIII. rationum. 248. X. qvæ fit addendo XV. Qvod. 253. XVI. bicubitale. *ibid.* XXVI. τῷ ἑνὶ, 256. VII. Ἐκλογῆς. 258. VI. necessarium. 266. *inter lin.* XXII.

&

&XXIII. insere τῇ ΕΖ ἡ ΔΘ ἴση, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΓΘ πρὸς ὀρθὰς ἡ, ΔΚ, καὶ κείσθω. 269. XXIII. figura XVII. 285. XXVIII αγ ϱβ 289. XXIIII. omni hac rationum. 292. *inter* XXI. *&* XXII *inser.* qvamvis hæc potius de æqvalitate duarum rationum rationis ab aliis explicetur. 301. XXI. deprehendit. 302. XXVII. rationem 81. 310. XX. fiatqve æqvalis. 325. XXI, & CD minor. 327. XXI. argumentis 389. VIII. σχέσιν. 343. XIII. cognoscitur. 349. XXVI. sic 64. 350. II insipidum. XX tibiipsi. 355. XIX. conseqventis. 372. XXII. Scepticorum.

Cœtera si qva erunt, per te emendabis.
Vale.





005643768